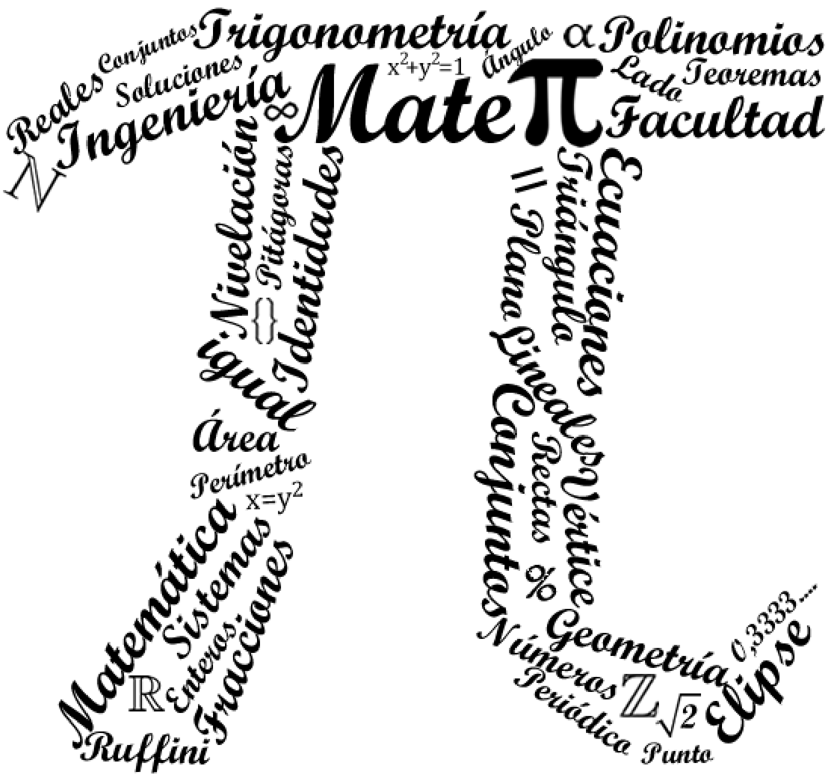
FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Matemática para Ingeniería

Módulo I



Edición 2018

Esp. Di Domenicantonio, Rossana
Lic. Lubomirsky, Noemí
Lic. Rivera, Ana Lucía

Decano
Ing. Marcos Daniel Actis

Vice Decano
Ing. Horacio Frene

Secretario Académico
Ing. José Scaramutti

Prosecretario Académico
Ing. Fernando Gutiérrez

Coordinadora de Matemática para Ingeniería
Esp. Rossana M. Di Domenicantonio

Impreso en el Centro Integral de Apuntes y Fotocopiado
del Centro de Estudiantes de la Facultad de Ingeniería (CIAF)
de la Universidad Nacional de La Plata

Noviembre 2017

Para el alumno

¡Te damos la bienvenida a la Facultad de Ingeniería de la UNLP!

Así como la función principal de un ingeniero es realizar diseños, desarrollar soluciones, comprometerse con las necesidades sociales, industriales o económicas, nuestro objetivo como cátedra es proporcionarte herramientas para que puedas abordar, profundizar y nivelar los contenidos del colegio y puedas adaptarte a la metodología de trabajo en este nuevo escenario que es la universidad y así estar mejor preparado para el resto de las materias de la carrera.

Un ingeniero debe identificar y comprender los obstáculos más importantes para poder realizar un buen diseño. Creemos que debes pensar que es la primer materia que cursas en la Facultad y te demandará tiempo y esfuerzo. Es importante reflexionar que notarás cambios respecto del colegio pero tienes que comprender que asumes un importante desafío al emprender esta carrera que elegiste y no tienes que desanimarte ante algún obstáculo sino utilizarlo de puntapié para encontrar, con ayuda nuestra, el mejor camino para el estudio.

El conocimiento de la ciencia, la matemática y la experiencia son utilizados por los ingenieros para encontrar las mejores soluciones a problemas concretos, creando modelos matemáticos que les permitan analizarlos y obtener potenciales soluciones optimizando los recursos disponibles. Esperamos que identifiques los conceptos, comprendas la argumentación teórica y puedas aplicarlos a los problemas y ejercicios propuestos. La ejercitación en el estudio de matemática es muy importante y los docentes estamos dispuestos a facilitarte los medios para que puedas realizar la materia con éxito.

Recuerda que todos los ingenieros fueron alguna vez ingresantes y que, como dijo Robert Collier, el éxito es la suma de pequeños esfuerzos, repetidos día tras día…

Rossana Di Domenicantonio

Agradecimientos

Al Ing. Marcos Actis, por el apoyo y constante preocupación por la materia.

A la profesora Daniela Sánchez y su grupo docente por haber trabajado con el primer borrador del material.

A la profesora Elfriede Chalar por sus aportes al material y sugerencias.

A la profesora Viviana Giandini por sus revisiones y aportes.

A todos los docentes de la Cátedra que conforman este gran equipo, por el compromiso, ideas, aportes y predisposición para fomentar mejoras y el entusiasmo para llevar esta importante tarea adelante!!

Introducción

Este material teórico-práctico propone acompañar al alumno en el repaso, ejercitación y profundización de los contenidos necesarios para iniciar esta etapa en la Facultad.

Para desarrollar cada tema se utilizaron definiciones, ejemplos, problemas resueltos y actividades que tendrás que resolver en la medida en que vayas avanzando en la lectura del apunte. Para facilitar la comprensión de algunos temas se incluyeron representaciones gráficas que permiten relacionar los registros analítico y geométrico de un mismo concepto. También se incluyeron cuadros con resúmenes de algunos temas para facilitar el estudio de los mismos y en algunos casos la comparación de similitudes o diferencias que ayudan a interpretación del tema.

Encontrarás además símbolos que te ayudarán a recorrer el material:

para observaciones y comentarios

para advertencias importantes que debes tener en cuenta

En este tipo de recuadros habrá ejemplos

Con este formato identificaremos los problemas y ejercicios resueltos.

Actividades
Bajo este recuadro encontraras la ejercitación correspondiente al tema que acabas de leer

Este recuadro es utilizado para los teoremas y resultados importantes

Antes de comenzar el desarrollo de los temas presentamos algunas tablas que te resultarán útiles durante el curso: una con áreas y perímetros de las figuras más comunes y otra con símbolos matemáticos y letras griegas. Además todos los capítulos tienen actividades de repaso al final, donde encontrarás ejercicios que relacionan todos los contenidos. Y algunos capítulos tienen un Anexo donde se desarrollan temas complementarios de lectura optativa.

Este material consta de **dos módulos** cada uno de los cuales tiene dos capítulos.

El primer capítulo es el de **Conjuntos numéricos** cuyo objetivo es recordar y clarificar las operaciones, definiciones y propiedades en los distintos conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales. El capítulo siguiente se llama **Ecuaciones y polinomios** y su objetivo es el de estudiar la resolución de distintos tipos de ecuaciones (lineales, cuadráticas, polinómicas y fraccionarias), operar con polinomios y repasar la factorización de polinomios y de otras expresiones algebraicas.

En el capítulo 3 de **Rectas, cónicas y sistemas de ecuaciones**, trabajaremos geométricamente en el plano coordenado, donde representaremos las rectas y cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. En estos casos se repasarán no solamente las ecuaciones de estas curvas si no también su relación con su representación geométrica. Además se estudiarán métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y sistemas mixtos. Finalmente en el capítulo 4 de **Trigonometría**, revisaremos los conceptos de ángulos, sistemas de medición y relaciones trigonométricas. Además resolveremos triángulos rectángulos y no rectángulos con los teoremas correspondientes.

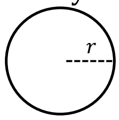
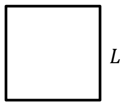
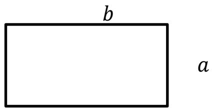
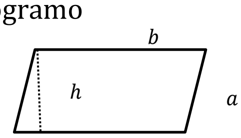
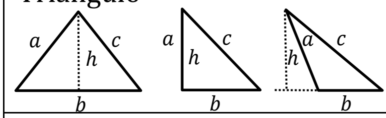
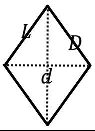
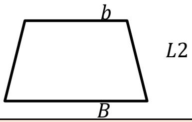
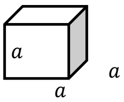
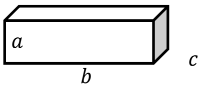
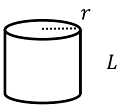
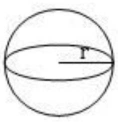
Tabla de símbolos matemáticos

$<$	Menor ($a< b$ significa que a es menor que b)
$>$	Mayor ($a> b$ significa que a es mayor que b)
$=$	Igual
$\neq$	No es igual, o es diferente a…
$/$	Tal que
$:$	Tal que
$\rightarrow$	Entonces
$\leftrightarrow$	Si y solamente si
∞	Infinito
$\therefore$	Por lo tanto
$\cong$	Aproximadamente igual
$\lvert x\rvert$	Valor absoluto de x, es decir, $\lvert x\rvert = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0. \end{cases}$
$\leq$	Menor o igual ($a \leq b$ si a es menor o es igual a b)
$\geq$	Mayor o igual ($a \geq b$ si a es mayor o es igual a b)
$\pm$	Más/menos: $\pm a$ representa dos valores: $+a$ y $-a$.
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\subset$	Inclusión (A $\subset$ B si el conjunto A está contenido en el conjunto B).

Alfabeto griego

α	alfa	ι	iota	ρ	rho (ro)
β	beta	κ	kappa	σ	sigma
γ	gamma	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mu	υ	ípsilon
ε	épsilon	ν	nu	φ	phi (fi)
ζ	zeta	ξ	xi	χ	ji o chi
η	eta	ο	ómicron	ψ	psi
θ	theta (tita)	π	pi	ω	omega

Fórmulas de Geometría

Gráfico de figura	Perímetro	Área
Circunferencia y Círculo 	$P = 2\pi r$ Circunferencia	$A = \pi r^2$ Círculo
Cuadrado 	$P = 4L$	$A = L^2$
Rectángulo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,a$
Paralelogramo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,h$
Triángulo 	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b\,h}{2}$
Rombo 	$P = 4\,L$	$A = \dfrac{D\,d}{2}$
Trapecio 	$P = B + b + L1 + L2$	$A = \dfrac{(B+b)}{2}\,h$
Gráfico de cuerpo	**Área**	**Volumen**
Cubo 	$A = 6\,a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo 	$A = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ac$	$V = a\,b\,c$
Cilindro 	$A = 2\pi r^2 + 2\pi r L$	$V = \pi r^2 L$
Esfera 	$A = 4\pi r^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

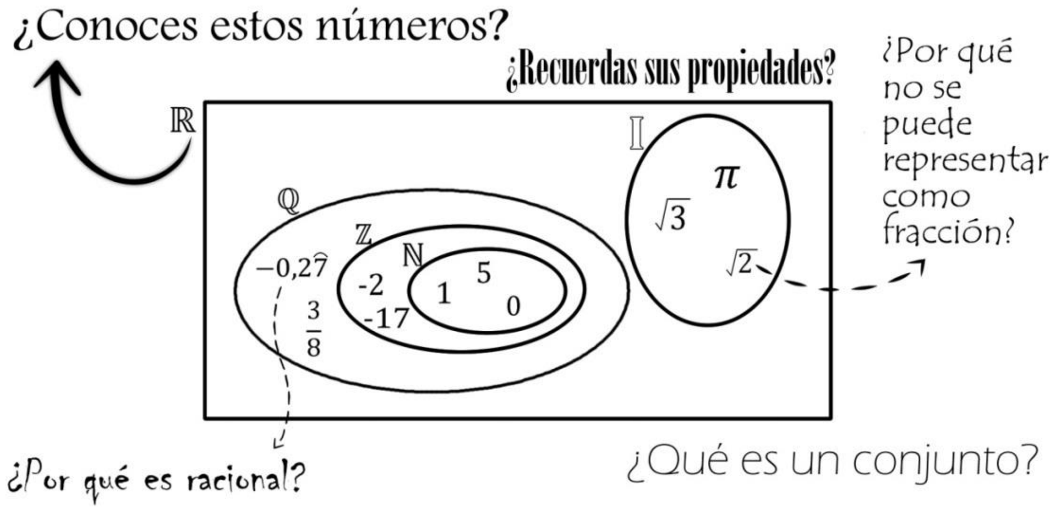
Capítulo 1: Conjuntos numéricos

Conjuntos 2
Operaciones entre conjuntos 3
Conjuntos numéricos 6
Naturales 6
Operaciones en el conjunto de los números naturales 7
Enteros 12
Operaciones en el conjunto de los números enteros 12
Valor absoluto de un número entero 14
Simbolización matemática de expresiones con números enteros 19
Algunos subconjuntos de los números naturales y enteros 21
Máximo común divisor y mínimo común múltiplo 25
Racionales 27
Operaciones en el conjunto de los números racionales 28
Porcentaje 40
Reales 44
Conjunto de números irracionales 44
Operaciones en el conjunto de los números reales 46
Actividades de repaso del Capítulo 1 60
Anexo del Capítulo 1 62
Relación de orden 62
Criterios de divisibilidad 62
Números irracionales 63

Capítulo 2: Ecuaciones y polinomios

Ecuaciones 66
Ecuación lineal 68
Ecuaciones cuadráticas 72
Problemas de aplicación con ecuaciones 79
Polinomios 85
Operaciones entre polinomios 88
Raíces de un polinomio 97
Factorización de polinomios 99
Fracciones algebraicas 106
Operaciones con fracciones algebraicas 107
Ecuaciones fraccionarias 111
Actividades de repaso del Capítulo 2 113

Capítulo 1:
Conjuntos numéricos



Con estas y otras preguntas, vamos a recordar, repasar y estudiar las propiedades de los números reales con los que trabajaremos en este material. Los números reales se usan en matemática, en ingeniería y en muchas disciplinas para representar magnitudes, simbolizar situaciones y realizar cálculos que querramos estudiar, predecir o analizar. Daremos profundidad y repaso de estos conceptos y propiedades en este Capítulo.

Conjuntos

Llamamos **conjunto** a una colección de elementos. Los **elementos** de un conjunto, pueden ser: personas, números, colores, letras, figuras, etc.

> El conjunto de los colores del arcoíris es:
> AI = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta}

Un conjunto suele definirse mediante una propiedad que todos sus elementos poseen. Para saber si un conjunto está bien definido tenemos que considerar lo siguiente: cuando la pertenencia de un elemento a un conjunto es clara, el conjunto estará bien definido. Por ejemplo, nadie dudaría de incluir al domingo entre los días de la semana, pero el conjunto de personas simpáticas no está bien definido, pues hay dudas si determinadas personas pertenecen o no al conjunto, pues la cualidad de simpatía no es precisa.

Otra forma de definir un conjunto es definirlo por sus elementos. En particular, un conjunto puede escribirse como una lista de elementos, pero cambiar el orden de dicha lista o añadir elementos repetidos no define un conjunto nuevo.

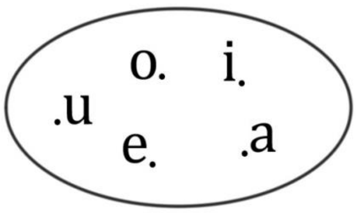
> S = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}
> = {Martes, Viernes, Jueves, Lunes, Miércoles}
>
> $L = \{x/x \text{ es letra de la palabra manzana}\} = \{m, a, n, z\}$

El símbolo "/" se lee "tal que" y en matemática se utiliza para indicar que determinados elementos cumplen la o las propiedades descriptas a continuación del símbolo.

Representamos un conjunto por una letra mayúscula, encerrándose sus elementos separados por comas entre llaves.

> El conjunto A que está integrado por las vocales se representa así: $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Gráficamente utilizamos el **diagrama de Venn**[1], que son líneas circulares u ovoides cerradas, donde se disponen los elementos, señalados mediante puntos. El conjunto A mencionado quedaría representado así:



Diremos que un elemento b **pertenece** al conjunto A, y lo notaremos $b \in A$, si es un elemento que corresponde al conjunto.

Si definimos un conjunto **por extensión**, debemos enumerar cada uno de sus elementos. En el caso de las vocales, debemos nombrar todas ellas: a, e, i, o, u, es decir $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Si lo definimos **por comprensión** nombramos solamente la propiedad que los caracteriza. En el mismo caso diríamos $A = \{las\ vocales\}$ o $A = \{x/x\ es\ una\ vocal\}$ que leemos: A es el conjunto de x, tales que x es una vocal.

[1] En homenaje a su creador, el matemático y lógico británico John Venn (1834-1923).

Un conjunto es **finito** si podemos contar la cantidad de elementos que lo conforman. Por ejemplo, el conjunto de las letras del idioma castellano es finito porque en total son 27 letras.

Los conjuntos **infinitos** son aquellos a los cuales no les podemos contar la cantidad de elementos que los componen. El método más fácil para representar este tipo de conjuntos es por comprensión.

> El conjunto de los números que terminan en tres, podríamos definirlo como:
> $$T = \{x/x \text{ es número y termina en tres}\}$$

También existe una manera de representar algunos conjuntos infinitos por extensión. Es suficiente con mostrar los primeros elementos del conjunto e indicar con puntos suspensivos que la lista continua indefinidamente. En el caso del conjunto T, definido en el ejemplo anterior y conformado por los números que terminan en tres, se tiene $T = \{3,\ 13,\ 23,\ 33,\ 43,\ 53,\ \ldots\}$.

Se dice que un conjunto A **está incluido** en otro B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B, y se denota como $A \subset B$. Diremos además que A es un **subconjunto** de B.

> El conjunto de alumnos que cursan "Matemática A" está incluido en el conjunto de alumnos de la Facultad de Ingeniería.

Definimos al **conjunto vacío**, como aquel conjunto que no tiene ningún elemento en su interior, y lo notamos como $\emptyset$ o { }.

> A es el conjunto de todos los perros que vuelan, entonces $A = \emptyset$.

Si dos conjuntos están formados por los mismos elementos se dice que son **conjuntos iguales**.

Los **conjuntos complementarios** son aquellos formados por todos los elementos de uno que no pertenecen al otro.

> Dados dos conjuntos, uno A, formado por las vocales abiertas a, e y o, es decir $A = \{a, e, o\}$ y otro conjunto B formado por las vocales en general, es decir $B = \{a, e, i, o, u\}$ el conjunto complementario estaría formado por i y u, es decir $A^c = \{i, u\}$.

Operaciones entre conjuntos

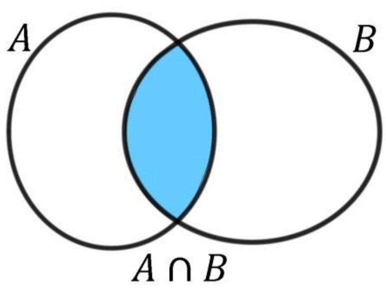
La **unión de conjuntos** A y B es un nuevo conjunto $A \cup B$ que está formado por los elementos de los dos conjuntos.

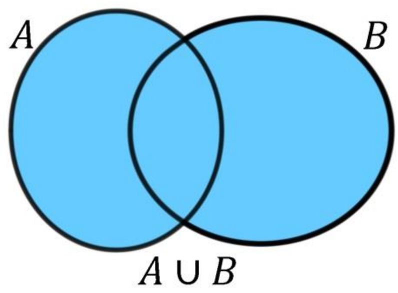
> Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$, entonces $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$.

La **intersección** de dos (o más) conjuntos es una operación que resulta en otro conjunto que contiene los elementos comunes a los conjuntos originales y se denota por el símbolo $\cap$.

> Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$, entonces la intersección de dichos conjuntos estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos, esto es $A \cap B = \{a, e\}$.

Dos conjuntos de dicen que son **disjuntos**, cuando no hay elementos en común entre ellos, es decir A y B son disjuntos cuando $A \cap B = \emptyset$.





Un grupo de alumnos de 6º año de un colegio participaron de una competencia de atletismo. Los alumnos Mario, Catalina, Juliana y Fernando participaron en lanzamiento de disco; las alumnas Catalina y Juliana participaron de la carrera de 100 metros; y los alumnos Lucas y Florencia participaron del maratón. Podemos resumir esos datos diciendo que:

$$L = \{Mario, Catalina, Juliana, Fernando\}$$
$$C = \{Catalina, Juliana\}$$
$$M = \{Florencia, Lucas\}$$

Cuando nos referimos a un alumno que participa de una determinada competencia, diremos que pertenece al conjunto determinado por esa competencia. Por ejemplo, Mario pertenece al grupo de lanzadores, es decir Mario $\in L$.

Si quisiéramos averiguar que alumnos participaron del lanzamiento y la carrera, lo que estamos buscando son aquellos alumnos que figuran en el conjunto L *y el conjunto* C *a la vez, es decir buscamos* $L \cap C$. *En este caso, tenemos que tanto Catalina como Juliana participaron de ambas competencias, es decir* $L \cap C = \{Catalina, Juliana\}$.

Si en cambio queremos aquellos alumnos que participaron en el lanzamiento de disco y en la maratón, como no hay alumnos en común, podemos decir que $L \cap M = \emptyset$, *o directamente que el conjunto* L *es disjunto con el conjunto* M.

Si estamos buscando el conjunto que reúne a todos los representantes del curso que fueron al torneo, lo que buscamos son aquellos alumnos que participaron en al menos una competencia, por lo que buscamos la unión de todos los conjuntos. Tenemos entonces

$$L \cup C \cup M = \{Mario, Catalina, Juliana, Fernando, Florencia, Lucas\}$$

Podemos notar además, que si queremos aquellos que participaron del torneo en representación del curso, pero no en lanzamiento, estamos hablando el complemento de L *y en este caso son Florencia y Lucas, es decir* $L^c = \{Florencia, Lucas\}$

Por último, todas los alumnos que participaron de la carrera también participaron de lanzamiento, por lo que podemos decir que $C \subset L$.

Sean A *y* B *los conjuntos dados por:*

$$A = \{números\ de\ dos\ cifras\ en\ los\ cuales\ la\ primera\ cifra\ es\ 2\}$$
$$B = \{números\ de\ dos\ cifras\ en\ los\ cuales\ la\ segunda\ cifra\ es\ 7\}.$$

Dar los conjuntos A, B y $A \cap B$ por extensión.

Para dar el conjunto A por extensión, debemos hallar todos los números de dos cifras cuya primera cifra es el 2. Por ejemplo, el 24 está en A porque cumple esa condición (lo que podemos escribir como $24 \in A$). De ese mismo modo podemos hallar los 10 números que componen el conjunto A:

$$A = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}.$$

De la misma manera podemos escribir por extensión el conjunto B, buscando todos los números de dos cifras que terminan en 7:

$$B = \{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}.$$

Para dar $A \cap B$ por extensión, debemos hallar números que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos A y B. Mirando los desarrollos de ambos conjuntos podemos observar que el único número que cumple esto es el 27. Por lo tanto

$$A \cap B = \{27\}.$$

Observemos que el número 27 es el único número de dos cifras que empieza con 2 y termina con 7, es decir, es el único número que cumple con las condiciones de ambos conjuntos cuando están dados por comprensión.

Actividades

1. Expresa los siguientes conjuntos por comprensión
   a) $A = \{\text{Rojo}, \text{Amarillo}, \text{Azul}\}$
   b) $B = \{\text{Chile}, \text{Brasil}, \text{Uruguay}, \text{Bolivia}, \text{Paraguay}\}$
   c) $C = \{m, e, s, a\}$
   d) $D = \{\text{Do}, \text{Re}, \text{Mi}, \text{Fa}, \text{Sol}, \text{La}, \text{Si}\}$
2. Expresa los siguientes conjuntos por extensión
   a) $A = \{\text{Días de la semana}\}$
   b) $B = \{\text{Colores de la bandera de Italia}\}$
   c) $C = \{\text{Letras de la palabra facultad}\}$
3. Dados los siguientes conjuntos realiza las operaciones pedidas:
   $A = \{\text{perro}, \text{gato}, \text{león}, \text{pantera}\}$
   $B = \{\text{loro}, \text{perro}, \text{pájaro}\}$
   $C = \{\text{gato}, \text{caballo}, \text{pez}\}$
   a) $A \cup C$
   b) $A \cap B$
   c) $A \cup (B \cap C)$
4. Sea E el conjunto de las estaciones del año, y $A = \{\text{Primavera}, \text{Otoño}\}$. Calcula el complemento de A en E (es decir, A^c).

Conjuntos numéricos

Los conjuntos conformados por números ocupan un lugar de especial importancia en el mundo de la matemática. Seguramente habrás escuchado, o incluso trabajado, con distintos tipos de números como por ejemplo $2, -5, \frac{1}{3}$ ó $\sqrt{5}$. Todas estas expresiones forman parte de diferentes conjuntos de números, a los que llamamos **conjuntos numéricos**.

Estudiaremos cuatro conjuntos numéricos en particular, los números naturales, los números enteros, los números racionales o fraccionarios y los números reales.

Estos conjuntos de números han ido apareciendo a medida que la humanidad se ha visto en la necesidad de solucionar problemas y retos cada vez más complejos y más profundos.

Naturales

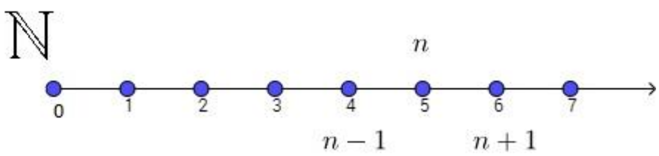
$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

El hombre tuvo la necesidad de representar cantidades de lo que tenía para saber con qué contaba exactamente y poder negociar. De ahí surgió la necesidad de crear símbolos que representaran esas cantidades. Por ejemplo, si alguien sabía cuántas gallinas tenía, podría establecer del mismo modo la cantidad de días que podría alimentar a su familia. A partir de esta necesidad el hombre creó lo que hoy conocemos como **números naturales**.

Debido a la importancia de este conjunto de números se creó un símbolo especial para identificarlo. Usaremos la letra $\mathbb{N}$ para representar el conjunto de los números naturales; así, cuando veas esta $\mathbb{N}$ en un libro de matemáticas, o en alguna clase, sabrás a qué se refiere.

Dado un número natural n, se define a su **siguiente** con $n+1$, y a su **anterior** como $n-1$ (siempre que n no sea el cero).

Representación en la recta numérica:



Dados dos números naturales podemos determinar si uno es mayor que el otro. Esta comparación nos determina una relación de orden entre ambos elementos. Por lo que se dice que el conjunto $\mathbb{N}$ es un **conjunto totalmente ordenado**.

> Sabemos que 5 es mayor que 2, o sea $5>2$, entonces 5 estará a la derecha del 2 en la recta numérica. Esta relación de orden entre los números 5 y 2 la podemos interpretar diciendo que 2 es menor que 5 y escribir como $2<5$.

En el Anexo del Capítulo 1 recordamos el uso de los símbolos mayor ($>$) y menor ($<$).

¿Cuál es el último número natural? No hay, sencillamente no existe un número natural que sea más grande que todos los demás, ya que cada vez que pensamos en uno, podemos encontrar muchos que sean mayores que él. Decimos entonces que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Como los números naturales se utilizan para contar elementos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos; dependiendo del área de la ciencia, el conjunto de los números naturales puede definirse entonces de dos maneras distintas, con o sin el cero. Nosotros vamos a considerar que el cero pertenece a los naturales, y es el primer elemento.

Operaciones en el conjunto de los números naturales

Suma

La suma es la operación matemática que resulta de reunir varias cantidades en una sola. También se conoce como adición. A cada cantidad que interviene en la suma se la denomina **sumando** y al resultado se lo llama **suma**.

$$\underbrace{a+b}_{sumandos} = \underbrace{c}_{suma}$$

Propiedades de la suma

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, tenemos

- Ley de cierre: El resultado de sumar dos números naturales es otro número natural, es decir, $a + b \in \mathbb{N}$.
- Conmutativa: El orden de los sumandos no varía la suma , es decir, $a + b = b + a$.
- Asociativa: El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado, es decir $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Existencia del neutro "0": El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número, es decir $a + 0 = a$.

Observemos que para cualquier número natural $a \neq 0$, no existe ningún número natural b tal que $a + b = 0$, es decir, que la suma tenga como resultado al neutro.

Propiedad asociativa Ley de cierre

$$2 + \underbrace{3 + 9 - 3}_{\downarrow} = 2 + \underbrace{9 + 3 - 3}_{\downarrow} = \overbrace{(2+9)}^{\uparrow} + \overbrace{(3-3)}^{\uparrow} = 11 + \underbrace{0}_{\downarrow} = \overbrace{11 \in \mathbb{N}}^{\uparrow}$$

Propiedad conmutativa Elemento neutro

Producto

Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor. Por ejemplo, la multiplicación 5.2 consiste en sumar el número 2 cinco veces. A cada cantidad que interviene en el producto se lo llama **factor** y al resultado se lo denomina **producto**.

$$\underbrace{a.b}_{factores} = \underbrace{c}_{producto}$$

$$5.7 = \underbrace{7 + 7 + \cdots + 7}_{5\ veces} = 35$$

Propiedades de producto

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, tenemos

- Ley de cierre: El resultado de multiplicar dos números naturales es otro número natural, es decir, $a.b \in \mathbb{N}$.
- Asociativa: El modo de agrupar los factores no varía el resultado, es decir, $(a.b).c = a.(b.c)$
- Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto, es decir, $a.b = b.a$
- Existencia del neutro "1": El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales porque todo número multiplicado por él da el mismo número, es decir, $a.1 = a$

Observemos que para cualquier número natural $a \neq 1$, no existe ningún número b natural tal que $a.b = 1$. Es decir, que el producto tenga por resultado al neutro.

Asociativa

$$2.\underbrace{7.5}_{\downarrow} = \overbrace{2.\underbrace{5.7}_{\downarrow}}^{\uparrow} = \overbrace{10.7}^{\uparrow} = \underbrace{70 \in \mathbb{N}}_{\downarrow}$$

Conmutativa Ley de cierre

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos. Es decir,

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Es el proceso inverso de lo que se conoce como "sacar factor común".

$2.(3 + 5) = 2.3 + 2.5.$
Comprobemos, $2.(3 + 5) = 2.(8) = 16$ y $2.3 + 2.5 = 6 + 10 = 16.$

Es muy importante en los cálculos algebraicos tanto de números naturales como de todos los cálculos que realicemos de ahora en más, prestemos mucha atención al correcto uso de los paréntesis ya que sin ellos un cálculo puede cambiar de resultado y ser otra cuenta totalmente diferente a la pedida.

$2.2 + 7 \neq 2.(2 + 7)$ ya que $2.2 + 7 = 4 + 7 = 11$ mientras que $2.(2 + 7) = 2.2 + 2.7 = 4 + 14 = 18.$

Actividades

5. Calcula aplicando la propiedad distributiva

a) $3 \cdot (2 + 3)$

b) $(5 + 3) \cdot (2 + 7)$

c) $(a + b) \cdot (a + b)$

d) $(a + 2 + c) \cdot (a + b + 1)$

e) $(a+2)\cdot(a+4)$

6. Coloca paréntesis donde corresponda para que el resultado sea verdadero:
   a) $15-3-1=13$
   b) $18:6:3=9$
   c) $18+3-15+2=4$
   d) $28-13-3+8=10$
   e) $18:2+4=3$
   f) $4+2\,.\,3=18$
7. Determina si es necesario agregar paréntesis para que la igualdad sea válida. En caso afirmativo coloca los paréntesis en el lugar correcto.
   a) $4+4:4+4=1$
   b) $4:4+4:4=2$
   c) $4+4+4:4=3$
   d) $4+4-4:4=4$
   e) $4\,.\,4+4:4=5$
   f) $4+4+4:4=6$
8. Calcula:
   a) $10-2+6-1+4-5+2$
   b) $34-3+25-12+3$
   c) $(2.3-5).(2+3)$
   d) $\frac{4.5-2.7}{2}+\frac{12}{4+2}$

División

La división entre dos números a y b consiste en encontrar el numero c talque $c.b=a$

En el conjunto de los números naturales no siempre la división da como resultado otro número natural, por ejemplo 3 dividido 2 no resulta otro número natural (o sea no se cumple la Ley de cierre para la división en $\mathbb{N}$). Decimos que el resultado de la división en los naturales son dos números llamados **cociente** y **resto** que cumplen el siguiente algoritmo

> **Algoritmo de la división:** Dados dos números naturales a y b, con $b\neq 0$, la división asocia un único cociente q y un único resto r, ambos números naturales, que verifican: $a=b.q+r$ con $r<b$

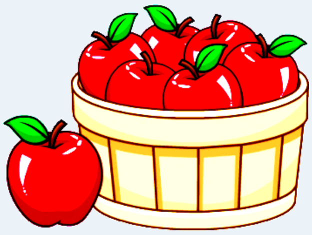
Por lo tanto este algoritmo nos proporciona la siguiente relación entre el número que queremos dividir al que llamamos dividendo y el número por el cual dividimos llamado divisor

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Resto}$$

$$\begin{array}{rcr|lcl}
\textit{Dividendo} & \leftarrow & 169 & 12 & \rightarrow & \textit{Divisor} \\ \cline{4-4}
 & & -12 & 14 & \rightarrow & \textit{Cociente} \\ \cline{3-3}
 & & 49 & & & \\
 & & -48 & & & \\ \cline{3-3}
\textit{Resto} & \leftarrow & 1 & & &
\end{array}$$

Entonces: $169 = 12\,.14 + 1.$

⚠ Siempre hay que tener cuidado que el divisor sea distinto de cero. ¡La división por cero está prohibida!

> Sabemos que si queremos dividir 7 manzanas entre 3 niños, la cuenta no va a dar exacta, por lo que si le damos 2 manzanas a cada uno, nos sobrará una.
>
> 
>
> Ahora, ¿por qué no decidimos repartir solo una a cada uno de los niños y quedarnos con 4? Porque sabemos que 4 es mayor que 3, por lo que podríamos repartir una manzana más a cada niño. Esta situación se refleja en el algoritmo enunciado, por la condición de que el resto debe ser menor que el divisor. Entonces si dividimos 7 por 3, obtenemos: $7 = 3.2 + 1$.

Divisibilidad

Si el resto de la división es cero, decimos que la división es **exacta** y nos queda que $a = b.q$

En este caso es equivalente decir que:

- b divide a a.
- a es divisible por b.
- b es un divisor de a.
- a es un múltiplo de b.
- b es un factor de a.

> $18{:}\,6 = 3$ por lo tanto $18 = 3.6$ con lo cual decimos que 6 divide a 18; que 18 es divisible por 3 y también es divisible por 6; 18 es múltiplo de 3 y de 6 y que tanto 6 como 3 son factores de 18.

Actividades

9. Aplica el Algoritmo de la división para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones
   a) 9 por 4
   b) 9 por 3
   c) 4 por 7

10. ¿Es 18 un factor de los siguientes números? Justifica aplicando el algoritmo de la división:

a) 270
b) 9
c) 308

Enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

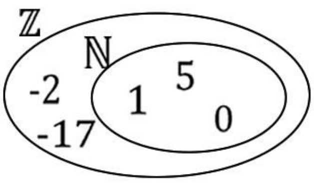
Diremos que el conjunto de los números **enteros** es igual al de los números naturales junto a los mismos números con signo negativo. Usaremos el símbolo $\mathbb{Z}$ para representar dicho conjunto.

Observemos que -0 es lo mismo que 0. Este es el único número entero que no es positivo ni negativo.

Además de poder representar cantidades enteras positivas, los números enteros nos permiten representar cantidades enteras negativas, usados por ejemplo cuando tenemos una deuda, o metros bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

Relación entre los números enteros y los números naturales

Entre ambos conjuntos existe una relación de inclusión ya que cada elemento del conjunto de los números naturales forma parte también del conjunto de los números enteros. Es decir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (los naturales están contenidso en los enteros), o lo que es equivalente, $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$.



Operaciones en el conjunto de los números enteros

Los números enteros conservan algunas de las propiedades de los números naturales, pero también cuentan con otras propiedades. Hay tres operaciones entre números enteros que tienen como resultado números enteros (ley de cierre): la suma, la resta y la multiplicación.

$$\underbrace{4+5}_{\in\mathbb{Z}} = \overbrace{9}^{\in\mathbb{Z}} \qquad \underbrace{3.7}_{\in\mathbb{Z}} = \overbrace{21}^{\in\mathbb{Z}} \qquad \underbrace{4-7}_{\in\mathbb{Z}} = \overbrace{-3}^{\in\mathbb{Z}}$$

Una de las propiedades de $\mathbb{N}$ es que existe un primer elemento del conjunto. ¿Pasará lo mismo en el conjunto $\mathbb{Z}$? Como $\mathbb{Z}$ contiene cada elemento de los números naturales y sus negativos, se extiende indefinidamente tanto positiva, como negativamente. Es decir, $\mathbb{Z}$ no puede tener un primer elemento. Los puntos suspensivos en la expresión $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ indican que el conjunto continúa (tanto a la derecha como a la izquierda) por lo cual este conjunto es infinito.

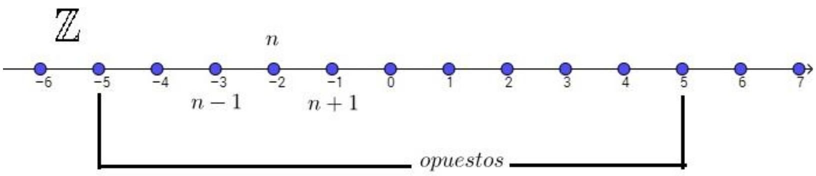
El siguiente y anterior de un número entero

Como en el caso de los números naturales, cada vez que fijemos un número entero podremos determinar su **sucesor**, es decir, el número entero siguiente. Para los números naturales, el siguiente se obtiene al agregarle una unidad al número dado (o sea, el siguiente de n es $n+1$). Debe pasar lo mismo entonces para los números negativos.

¿Cuál será el sucesor de -4? Si por ejemplo le debemos 4 naranjas al verdulero , o sea, tenemos -4 naranjas y pagamos una ¿cuántas debemos ahora? La respuesta es que ahora debemos solamente 3 naranjas. Es decir, hemos encontrado que el sucesor de -4 es -3, o sea a -4 le sumamos 1. Lo mismo pasa con el resto de los números negativos.

Análogamente se deduce que para obtener el **anterior** de un número entero se resta 1.

Entonces si $n \in \mathbb{Z}$, el siguiente es $n+1$ y el anterior es $n-1$



Propiedades de la suma

Las propiedades de la suma que se cumplían en el conjunto de los números naturales, siguen cumpliéndose en el conjunto de los enteros.

Dados a, b y $c \in \mathbb{Z}$, tenemos:

- Ley de cierre: suma de dos enteros es entero.
- Ley conmutativa: $a+b=b+a$.
- Ley asociativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$.
- Existencia del neutro que es el “0”.

Agregamos ahora la siguiente propiedad:

- Existencia del opuesto: Para cada número $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a+(-a)=0$ o sea, el resultado es el neutro de la suma.

> Para 5, existe el -5, donde $5+(-5)=0$. Del mismo modo, para -6, existe el 6 tal que $(-6)+6=0$.

Una consecuencia de la existencia del opuesto, es el beneficio de poder escribir a la resta como una suma. Es decir, restar b es lo mismo que sumar el opuesto de b.

$$a-b=a+(-b)$$

> $$5-2=5+(-2)=3$$

Propiedades del producto

En el producto, no se agrega ninguna propiedad extra a las que tenían los naturales.

Es decir: Dados a, b y $c \in \mathbb{Z}$, tenemos:

- Ley de cierre (producto de dos enteros es entero).
- Ley conmutativa (el orden de los factores no altera el producto).
- Ley asociativa $(a.(b.c)=(a.b).c)$.
- Existencia del neutro que es el 1.

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

La multiplicación de un número entero por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos. Es decir,

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

Regla de los signos para la multiplicación y la división

Tanto para el producto como para la división	
$+$ *por* $+$	$+$
$-$ *por* $-$	$+$
$+$ *por* $-$	$-$
$-$ *por* $+$	$-$

2 · 5 = 10	(−2) · (−5) = 10	2 · (−5) = − 10	(−2) · 5 = − 10
10 : 5 = 2	(−10) : (−5) = 2	10 : (−5) = − 2	(−10) : 5 = − 2

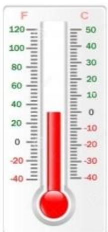
Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto (o módulo) de un número entero es su valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea este positivo $(+)$ o negativo $(-)$. El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales.

$|-5| = 5, |5| = 5$, es decir 5 es el valor absoluto de $+5$ y de -5

Aplicación del valor absoluto en casos reales de la vida cotidiana

- Distancia: Si estamos parados en un lugar y caminamos cierta cantidad de metros, decimos por ejemplo “caminé 10 pasos”, pero si retrocedemos no decimos “caminé -10 pasos”, ya que independientemente del sentido, la distancia recorrida sigue siendo 10 pasos.
- Ascensor: Otro ejemplo simple es pensar cuando tomamos un ascensor, decimos “subí 3 pisos”, sin embargo si bajamos, no decimos “hice -3 pisos”, sino que decimos “bajé 3 pisos”.
- Altitudes y profundidades: Como el 0 es considerado el nivel del mar, aquellos niveles que estén por encima de 0 se expresan con números positivos y aquellos niveles por debajo del nivel del mar se expresan con números negativos o decimos “tantos metros (en positivo) bajo el nivel del mar”.
- Termómetro: Cuando la temperatura está sobre 0°, se indica con valores positivos, por ejemplo 5°, en cambio cuando está por debajo de 0°, se indica 5° bajo cero (o sea $-5°$).



En forma genérica el valor absoluto se define:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Esto significa que si a es un número mayor o igual a cero, el valor absoluto de ese número es el mismo número. En cambio si la variable a es un número menor que cero, entonces al anteponerle un signo negativo se transforma en positivo.

> Si $a = 2$, $|a| = 2$ y si $a = -3$ entonces $|a| = -(-3) = 3$.

Propiedades del valor absoluto

- $|a| \geq 0$ (Siempre el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero)
- $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a.b| = |a|.|b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)
- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|a - b| = 0 \leftrightarrow a = b$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$a \leftrightarrow b$ se lee como " a si y solo si b" y significa que la única forma de que sea válido b es que haya sido válido a y viceversa. En consecuencia, si no vale b no puede valer a (y viceversa).

Actividades

11. Calcula:

a) $3 \cdot 15 + (-4).2$

b) $(-20) \cdot (-5) - \frac{(-8)}{(-4)}$

c) $\frac{2.(-6)}{3} + \frac{(4+6)}{5} - (-8)$

d) $\frac{2+5+3}{2+3} - \frac{-12}{4} + \frac{8}{3+1}$

e) $(a - b) \cdot (a + b)$

12. Calcula aplicando las propiedades

a) $|4 - 7|$

b) $|10.(-2)|$

c) $|9-5|-|-6|$

d) $\left|\frac{6}{-3}\right|+|2|$

Ya hemos visto la división y el Algoritmo de la división en los naturales. Ahora en los enteros hay que hacerle una pequeña modificación en el valor del resto, para que el mismo siga siendo válido y se mantenga la unicidad.

Algoritmo de la división en enteros: Dados dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, la división asocia un único cociente q y un único resto r, ambos números enteros, que verifican:

$$a = b.q + r, \qquad 0 \leq r < |b|$$

Cuando el dividendo y/o el divisor son enteros negativos, se puede realizar el Algoritmo de la división con el valor absoluto de esos mismos números (o sea ellos mismos en positivo) y luego utilizar lo obtenido para deducir el cociente y el resto buscados con el correspondiente signo.

Queremos saber el cociente y el resto de dividir 17 por -5:
Sabemos que $17 = 5.3 + 2$. Como ahora nuestra división es por -5, podemos multiplicar tanto al cociente como al divisor por -1, y así el resultado no varía.

$$17 = (-5).(-3) + 2$$

Entonces el cociente es -3 y el resto es 2.

Queremos ahora el cociente y el resto de dividir -17 por 5:
En este caso lo que haremos es "pasarnos" con el cociente, obteniendo un resto negativo. Es decir, sabemos que $17 = 5.3 + 2$, pero usamos $17 = 5.4 - 3$. Luego multiplicamos por -1 ambos miembros obteniendo $-17 = -5.4 + 3$. Por último asociamos el signo menos con el divisor o el cociente según corresponda, obteniendo en nuestro caso $-17 = 5.(-4) + 3$
Así el cociente es -4 y el resto es 3.

Daniela le debe a Lucía 35 hojas de carpeta. Fue a la librería y le dijeron que las hojas se venden por docena. ¿Cuántos paquetes debe comprar y cuántas le van a sobrar?

Para poder plantear el problema, analicemos las cantidades con las que debemos trabajar: la deuda de Daniela la podemos representar con -35 hojas. Y como los paquetes vienen por docena, nuestro dividendo será 12.
Para calcular los paquetes que debemos comprar, tenemos que hacer la división de -35 por 12.

Daniela pensó primero en comprar dos paquetes pero se dio cuenta que no era suficiente, ya que hubieran faltado 11 hojas. Entonces decidió comprar un paquete más y de ese modo pagaría la deuda y le sobra una para ella.
Si queremos expresar esto matemáticamente, lo primero que pensó Daniela fue

$$35 = 12.2 + 11$$

pero se dio cuenta que debía comprar otro paquete de hojas:

$$35 = 12.3 - 1.$$

Como Daniela le debe 35 hojas a Lucía (-35) entonces multiplicamos por -1 *a ambos lados de la igualdad y obtenemos*

$$-35 = -12.3 + 1 = 12.(-3) + 1.$$

Entonces debemos interpretar que Daniela debe darle 3 paquetes a Lucía pero le sobrará una hoja para ella. Es decir, que debe comprar una cantidad de paquetes que le permita superar la cantidad de hojas que debe, para poder devolver lo necesario y que el resto sea positivo.

Actividades

13. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones, aplicando el algoritmo de la división

    a) $18: -4$

    b) $-22: 5$

    c) $-27: -4$

    d) $-4: 9$

Análogo a los naturales, si el resto de la división es cero, decimos que la división es **exacta** y nos queda la igualdad $a = b.q$.

En este caso se puede decir que

- b divide a a.
- a es divisible por b.
- b es un divisor de a.
- a es un múltiplo de b.
- b es un factor de a.

Potenciación

La potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

$$5.5.5.5 = 5^4$$

$$(-2).(-2).(-2) = (-2)^3$$

Los elementos que constituyen una potencia son:

$$\underbrace{a}_{\text{Base}}^{\overbrace{b}^{\text{Exponente}}}$$

La **base** de la potencia es el número que multiplicamos por sí mismo.

El **exponente** de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base (en el ejemplo anterior de 5^4 el exponente es 4 y la base es 5).

En general, si n es un número natural:

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\text{ veces}}$$

y se lee: potencia enésima de a.

La potencia 2 de un número se llama su "cuadrado" y la potencia 3 su "cubo".

Propiedades de la potencia con base en los enteros y exponente natural

- Un número $a \neq 0$ con exponente 0 es igual a 1, es decir $a^0 = 1$.

  $3^0 = 1,\qquad (-4)^0 = 1$

- Un número a elevado a 1 es igual a sí mismo, es decir $a^1 = a$.

  $7^1 = 7,\qquad (-6)^1 = -6$

- Producto de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes, $a^m.a^n = a^{m+n}$.

  $2^5.2^2 = 2^{5+2} = 2^7,\qquad (-3)^3.(-3)^6 = (-3)^{3+6} = (-3)^9$

- División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

  $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2,\qquad (-1)^6 : (-1)^3 = (-1)^{6-3} = (-1)^3$

- Potencia de una potencia: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

  $(2^5)^3 = 2^{5.3} = 2^{15},\qquad ((-2)^4)^7 = (-2)^{4.7} = (-2)^{28}$

Observación: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ es decir, la potencia no es asociativa.

- Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. $a^n.b^n = (a.b)^n$

  $2^3.(-4)^3 = (2.(-4))^3 = (-8)^3$

La potencia no es distributiva con respecto a la suma, es decir $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. Por ejemplo $(2+3)^2 = 5^2 = 25 \neq 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Signo de la potencia

1. Las potencias de exponente par son siempre positivas.

$$(+)^{par} = +$$
$$(-)^{par} = +$$

$2^6 = 64$ y $(-2)^6 = 64$

2. Las potencias de exponente impar tiene el mismo signo de la base.

$$(+)^{impar} = +$$
$$(-)^{impar} = -$$

$2^3 = 8$ y $(-2)^3 = -8$

Actividades

14. Realiza los siguientes cálculos aplicando propiedades

a) $(-3)^3.(-3)^2.(-1)^2$

b) $\left(-\frac{8}{4}\right)^2 .((2)^3)^2 : (2)^1$

c) $(2+4)^2.6^3$

d) $[(6)^2:(2)^2+(-4)^3:(-4)^2]^2$

Simbolización matemática de expresiones con números enteros

Es importante aprender a analizar el lenguaje matemático y poder expresarlo en un lenguaje analítico. Poder expresarse correctamente con él y saber traducir enunciados del lenguaje natural o real al lenguaje matemático y viceversa es un proceso que lleva tiempo y dedicación además de mucha ejercitación y práctica. Nosotros iniciamos un proceso que luego se irá completando en el resto de las materias de matemática de la carrera.

Simbolizar matemáticamente es traducir una situación o expresión dada al lenguaje matemático mediante letras, números y/o símbolos matemáticos, donde las cantidades que nos son desconocidas las representaremos con una letra a la que llamaremos **incógnita** (o **variable**). Una vez obtenida la expresión simbólica (abstracta) será más sencilla de manipular, para resolver un problema o situación. Para ello es recomendable seguir los siguientes pasos:

1°) Leer detenidamente el enunciado (una coma puede alterar la expresión).

2°) Definir las variables a utilizar.

3°) Representar matemáticamente o escribir con símbolos matemáticos la expresión o problema.

4°) Verificar lo simbolizado con el enunciado inicial.

"La suma de un numero entero cualquiera y su siguiente"
Definimos n como un número entero, por lo tanto $n+1$ es el siguiente de n. Entonces la modelización matemática de la expresión queda:

$$n+(n+1).$$

"El cuadrado de la edad de Analía dentro de 5 años"
Vamos a llamar A a la edad actual de Analía contada en años. Dentro de 5 años, Analía tendrá $A + 5$ años, por lo que el cuadrado de su edad será

$$(A + 5)^2 \text{ con } A \in \mathbb{N}.$$

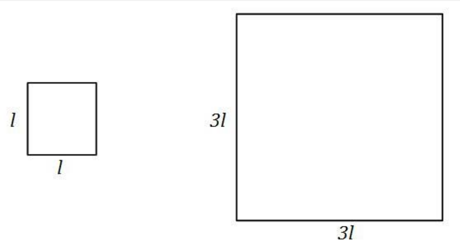
En general en matemática para mostrar que un enunciado o proposición (igualdad o afirmación) es verdadera, se deben realizar una serie de pasos lógicos, haciendo uso de propiedades, relaciones y operaciones para llegar a mostrar en forma genérica, y fundamentada que el enunciado o premisa es verdadero para todo número que se esté considerando. No basta probar con muchos ejemplos numéricos, sino que hay que hacerlo de manera genérica y simbólica. Para realizar esto existen varias técnicas como inducción matemática, mostrar por el absurdo, etc. que se estudiarán en materias superiores.

En cambio para probar la falsedad de un enunciado matemático o de una proposición, alcanza con mostrar un contraejemplo, o sea con un solo caso que uno muestre que no vale, es suficiente para mostrar que algo es falso. Por ejemplo, "Si llueve entonces llevo un paraguas" es falsa ya que no siempre recuerdo de agarrarlo; "Todos los países contienen la letra A en su nombre" Por más que Argentina, Cuba, España, Alemania, y varios países más lo cumplan, por ejemplo Chile o Perú sirven como contraejemplo de que la frase no es verdadera.

Se llama valor de verdad de una proposición o enunciado matemático a su veracidad (Verdadero) o falsedad (Falso).

Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando analíticamente la respuesta:

- *"Si el lado de un cuadrado se triplica entonces su perímetro también".*



Como el perímetro es la suma de los cuatro lados, consideremos $P_1 = 4.\,l$
Luego planteamos que $P_2 = 4.(3l) = 3.(4l) = 3.P_1$.
Ya que con las propiedades conmutativa y asociativa, llegamos a comprobar que el enunciado se cumple en forma genérica (independiente del valor del lado del cuadrado), la afirmación dada es verdadera.

- *"El cuadrado de una resta es la resta de los cuadrados de ambos números"*

Es decir, lo que querríamos es ver si se cumple que $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
Si tomamos como contraejemplo que $a = 3$ *y* $b = 2$, *tenemos que* $(3-2)^2 = 1 \neq (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$. *Por lo tanto, la afirmación es falsa.*

Actividades

15. Simboliza matemáticamente los siguientes enunciados:
    a) m se obtiene a partir de multiplicar tres enteros consecutivos.
    b) Dado $m \in \mathbb{Z}$ obtiene la suma del cubo de su anterior con el triple del cuadrado de su siguiente.
    c) El número entero m es tal que la diferencia entre el cubo de su siguiente con su anterior es igual al doble de su siguiente.
16. Consultando las Fórmulas de geometría del material escribe las expresiones de:
    a) La superficie y el perímetro de un cuadrado de lado $3l$.
    b) La superficie y el perímetro de un rectángulo de base a y altura b.
    c) La superficie y el perímetro de una circunferencia de radio $4r$.
    d) La superficie lateral y el volumen de un cubo de lado $l + 1$.
    e) La superficie y el volumen de una esfera de radio $2r$.
    f) El área de un triángulo rectángulo de altura h y base b.
    g) El área de un triángulo no rectángulo de altura h y base b.
17. Determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando tu respuesta:
    a) Si el lado de un cuadrado se triplica, su área aumenta 8 veces.
    b) Si $-a$ es entero entonces a es entero positivo.
    c) Si n y m son números enteros, entonces $n^4 + 5.m^2 - n.m$ es un número entero.
18. Escribe las expresiones correspondientes a las siguientes situaciones:
    a) El área de un rectángulo cuya base es el triple que su altura.
    b) La diferencia entre la edad de un padre y un hijo, de los que se sabe que la edad del padre cuadruplica a la del hijo.
    c) La suma de dos números donde el segundo es 4 unidades menor que el doble del primero.
    d) La edad de Juan supera en 4 años a la edad de Pedro. Expresa la suma de sus edades dentro de 5 años.
    e) El producto de un número entero positivo con la séptima parte del cuadrado de su siguiente.

Algunos subconjuntos de los números naturales y enteros

Múltiplo de un número

Un **múltiplo** de un número a es un número b que resulta de multiplicar a a por un número entero. En otras palabras, un múltiplo b es un número tal que dividido por a, da por resultado un número entero (el resto de la división es cero).

Formalmente dados a y b, si ambos son enteros, se dice que b es un **múltiplo** de a si y solo si $b = n\,.\,a$, para un entero n.

$$b = n.a \text{ , con } n \in \mathbb{Z}$$

> 55 es un múltiplo de 11 porque $55 = 5.11$ En este caso $b = 55, n = 5$ y $a = 11$.

> 36 es múltiplo de 3 porque $36 = 12.3$ En este caso $b = 36, n = 12$ y $a = 3$.

Divisor de un número

Los **divisores** de un número son aquellos valores que dividen al número en partes exactas. Así, dado un número a, si la división $a : b$ es exacta (o sea el resto es cero), entonces se dice que b es **divisor** de a. También se puede decir que a es **divisible** por b o que a es un múltiplo de b.

> Los divisores de 36 son $\pm1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ y ±36.

> Los divisores de -15 son $\pm1, \pm3$, ±5 y ±15

El símbolo $\pm$ es solo una notación. Sirve para indicar en una única expresión que hay dos valores posibles: uno con el signo $+$ y otro con el signo $-$. Por ejemplo: ±3 significa que nos referimos a 3 y a -3.

Todo número es divisible por ±1, por sí mismo y por su opuesto.

Números pares

$$P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Si tuviéramos que definir al conjunto de los números pares por comprensión, es decir, decir la cualidad que caracteriza a los números pares diríamos que son los múltiplos de 2. ¿Y cómo definiríamos a los múltiplos de 2?

Diremos que un número a es múltiplo de 2 si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2 \cdot k$

A partir de esta definición, podríamos preguntarnos, ¿qué ocurre si sumamos dos números pares? ¿Será par? Este simple problema nos impone la necesidad de simbolizar matemáticamente y resolver de manera genérica.

Para comenzar, consideremos dos números pares cualesquiera, a y b. Como ambos son pares, podemos escribir $a = 2 \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$; $b = 2 \cdot m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Si sumamos a con b tenemos, $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot m = 2 \cdot (k + m)$. Ahora, como k y m son enteros, y además están sumados, por la Ley de Cierre para la suma de enteros, tenemos que $k + m \in \mathbb{Z}$. Con lo cual, si llamamos $n = k + m$ como n es entero, tenemos $a + b = 2 \cdot n$ con $n \in \mathbb{Z}$, con lo cual hemos demostrado simbólicamente que la suma de dos números pares es par.

Esta definición de los números pares en los números enteros, vale también para el conjunto de los números naturales.

Actividades

19. Suponiendo que a, b y c son números enteros pares probar:

a) $a + b + c$ es par.

b) $3a - b$ es par.

c) $a + c - b$ es par.

Estudiar la **paridad** de un número es decidir si ese número es par o impar.

Números Impares

$$I = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

Otro subconjunto del conjunto de los enteros es el de los números impares. En este caso no podríamos decir que los impares son múltiplos de algún número en particular. Sin embargo, no es muy difícil darse cuenta que cualquier número impar es el consecutivo de un número par, por lo que podemos afirmar que un número entero a es impar si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2 \cdot k + 1$.

Análogamente podemos definir los números impares en los naturales, donde la condición necesaria es que si $a = 2.k + 1$, k debe pertenecer a los naturales.

7 es impar ya que: $7 = 2.(3) + 1$ siendo $3 \in \mathbb{Z}$.

-8 es par ya que: $-8 = 2.(-4)$ siendo $-4 \in \mathbb{Z}$.

-30 es par ya que: $-30 = 2.(-15)$ siendo $-15 \in \mathbb{Z}$.

Comprueba que la suma de dos números impares es siempre un número par.

A partir de la definición, si consideramos dos números impares, a y $b$tenemos, que $a = 2.k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $b = 2c + 1$, con $c \in \mathbb{Z}$. Entonces, sumando

$$a + b = 2k + 1 + 2c + 1 = 2(k + c) + 2 = 2(k + c + 1)$$

En virtud de la Ley de cierre, tenemos que $k + c + 1$ pertenece a $\mathbb{Z}$ por lo que podemos escribir $a + b = 2 \cdot m$ con $m \in \mathbb{Z}$ que es la definición de un número par. Por lo tanto, queda probado que la suma de dos números impares es un número par.

Actividades

20. Simboliza matemáticamente los siguientes enunciados:

a) m es la suma de un múltiplo de 5 con un múltiplo de 7.

b) m es la diferencia entre el cubo de un múltiplo de 3 y los cuadrados de un múltiplo de 5.

c) m es la suma de dos números impares.

d) m es el cubo de la suma de dos números pares consecutivos

21. Determina la paridad si es posible de:

a) Un número que se obtiene a partir de la suma de dos números pares.

b) Un número que se obtiene a partir del producto de dos números impares.

c) El producto de dos números pares

d) El cuadrado de un número par.

e) El cuadrado de un número impar.

22. Determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando tu respuesta.

a) La suma entre un múltiplo de 8 y un múltiplo de 4 es un número par.

b) La diferencia entre el cuadrado de un múltiplo de 10 y el cubo de un múltiplo de 2 es siempre múltiplo de 4.

c) La suma de un múltiplo de 10 con un múltiplo de 25 es siempre múltiplo de 15.

d) Si n es par entonces $4n + 24$ es múltiplo de 8.

e) Si n es un múltiplo de 3, entonces $2(\mathrm{n}+1)^2 + 4(\mathrm{n}+1)$ es múltiplo de 6.

f) Si n es impar entonces $n^2 - 3n + 8$ es impar.

Números primos

En los números naturales se define un **número primo** como aquel número mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. Hay infinitos números primos[2].

> 2 es primo ya que sus únicos divisores son 1 y 2. El 5 es primo ya que sus únicos divisores son 1 y 5. El 6 no es primo, ya que sus divisores son 1, 2, 3 y 6.

A diferencia de los números primos, los números **compuestos** son los números naturales que tienen algún divisor aparte de él mismo y el 1 y por lo tanto, pueden factorizarse.

El número 1, por convención, no se considera ni primo ni compuesto.

> 6 es un número compuesto.

> 18 es compuesto, porque 18=1.18, pero también 18=2.9, o 18=3.6

[2] Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,...

Algunos autores definen los números primos en el conjunto de los números enteros, como todo número p no nulo $(p \neq 0)$ y distinto de 1 y -1 que tiene únicamente cuatro divisores distintos: $p, -p$, 1 y -1.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor

El **m.c.d.** de dos o más números es el mayor número que divide a todos de manera exacta.

> El m.c.d.(18, 27)=9, pues 18=9.2 y 27=9.3

Procedimiento para el cálculo del máximo común divisor:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los factores comunes con menor exponente.

Hallar el m.c.d. de: 72, 108 y 60.

1.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3.3^2 \qquad 108 = 2^2.3^3 \qquad 60 = 2^2.3.5$

2. Como el 2 es factor en los tres casos, y la mayor potencia que se repite es 2, 2^2 debe estar en el m.c.d. A su vez, 3^1 también está presente en los tres casos, por lo que también debe figurar. En cambio 5 solo aparece en la última factorización, por lo que no estará. Entonces el m.c.d.$(72,108,60) = 2^2.3 = 12$

Propiedad: Si un número es divisor de otro, entonces éste es el m.c.d.

> El número 12 es divisor de 36. Entonces m.c.d.(12, 36) = 12

Actividades

23. Hallar el m.c.d. en los siguientes casos:

a) m.c.d.(10,25)

b) m.c.d.(8,18)

c) m.c.d.(13,91)

Mínimo común múltiplo

Es el menor de todos múltiplos comunes a varios números, excluido el cero.

> m.c.m.(9,6)=18, pues 18=9.2 y 18=6.3

Procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo:

1. Se descomponen los números en factores primos
2. Se toman los factores comunes y no comunes con mayor exponente.

Hallar el m.c.m. de: 72, 108 y 60.

$$72 = 2^3.3^2$$
$$108 = 2^2.3^3$$
$$60 = 2^2.3.5$$

Entonces, m.c.m.$(72,108,60) = 2^3.3^3.5 = 1080$

Propiedad: Si un número es un múltiplo de otro, entonces es el m.c.m. de ambos.

> El número 36 es múltiplo de 12. Entonces m.c.m.(12, 36) = 36

Actividades

24. Calcular el m. c. d. y m.c.m. de:
    a) 600 y 1000
    b) 1048, 786 y 3930
    c) 46 y 138

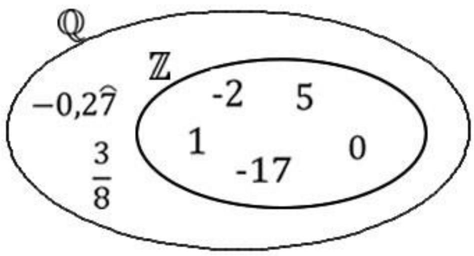
Racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ / \ m, n \ \in \mathbb{Z}, y \ n \neq 0 \right\}$$

¿Qué son números racionales? Podemos empezar por decir que un número racional es una cifra o valor que puede ser expresado como el cociente de dos números enteros donde el denominador es distinto de 0. Es decir que un número racional es un número que se escribe mediante una fracción de enteros.

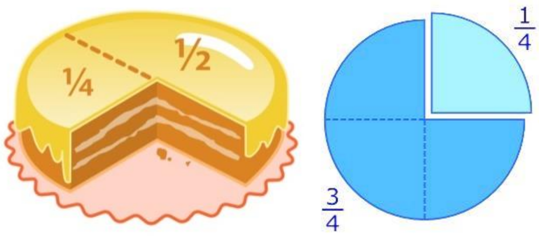
Los números racionales son números fraccionarios, sin embargo los números enteros también pueden ser expresados como fracción, por lo tanto también pueden ser tomados como números racionales con el simple hecho de dar un cociente entre el número entero y el número 1 como denominador. Es decir $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

> 3 es racional ya que $3 = \frac{3}{1}$ con 3 y $1 \in \mathbb{Z}$.



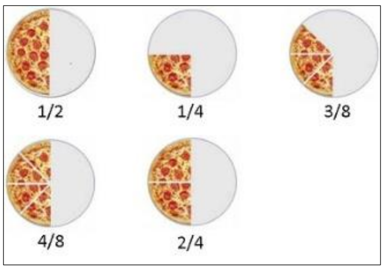
A diferencia de los números enteros que son consecutivos, por ejemplo al 4 le sigue el 5 y a éste a su vez le sigue el 6, al -9 le sigue el -8 y a este a su vez le sigue el -7; en los números racionales no existe el concepto de consecutivo pues entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

En una fracción $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$, llamaremos **numerador** al número superior de la fracción (en este caso m, e indica el número de partes elegidas, mientras que el **denominador** (en este caso n) indica el número de partes en que se ha dividido la unidad, y tiene que ser distinto de cero.



Fracciones equivalentes

Un número racional puede ser expresado de diferentes maneras, sin alterar su cantidad mediante **fracciones equivalentes**, por ejemplo $\frac{1}{2}$ puede ser expresado como $\frac{2}{4}$ o $\frac{4}{8}$, debido a que estas son fracciones reducibles. Por ejemplo, si una pizza está cortada en 8 porciones iguales, es lo mismo decir que comimos 4 porciones de 8, que decir que comimos media pizza.



Para reducir una fracción podemos utilizar el método de simplificación, es decir, sustituir la fracción por otra equivalente más sencilla. Esto se podrá hacer cuando el numerador y el denominador se puedan dividir por un mismo número.

$$\frac{3}{60}=\frac{1}{20} \quad \text{y} \quad \frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

Para simplificar es conveniente tener en cuenta los criterios de divisibilidad que están en el Anexo de este Capítulo.

No es necesario que nos esforcemos en hacer una única simplificación directamente. A veces es más fácil hacerla en varios pasos.

$$\overbrace{\frac{180}{120}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}}^{fracciones\ equivalentes}$$
$$\underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{irreducible}}$$

Cuando una fracción no se puede simplificar más, se dice que es **irreducible** y esto sucede cuando su numerador y su denominador son números primos entre sí, es decir, m.c.d.(m,n)=1.

Cuando tenemos una fracción con denominador negativo, es usual cambiar el signo al numerador o directamente delante de la fracción, es decir: $\frac{7}{-3}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$. Otro ejemplo es $\frac{-5}{-8}=\frac{-(-5)}{8}=\frac{5}{8}$.

Operaciones en el conjunto de los números racionales

Suma

Si queremos sumar dos números racionales que en su expresión fraccionaria tienen el mismo denominador, debemos sumar los numeradores.

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$$

De manera genérica,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Para sumar dos números racionales con diferente denominador, trabajaremos con sus expresiones equivalentes, buscando tener el mismo denominador.

Realiza la suma $\frac{1}{5}+\frac{2}{7}$

Si necesitamos sumar $\frac{1}{5}$ *con* $\frac{2}{7}$ *lo que haremos es buscar cuál sería el denominador común.*

Sabemos que el m.c.m.(5,7)=35, entonces en la primera fracción multiplicamos por $\frac{7}{7}$ *:*

$$\frac{1}{5} = \frac{1.7}{5.7} = \frac{7}{35}$$

De la misma manera, al 7 hay que multiplicarlo por 5 para obtener 35, de donde

$$\frac{2}{7} = \frac{2.5}{7.5} = \frac{10}{35}$$

Con todo lo anterior,

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{7}{35} + \frac{10}{35} = \frac{7+10}{35} = \frac{17}{35}$$

Realiza la operación $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

Como el m.c.m.(4,6)=12, entonces

$$\frac{1}{4} = \frac{1.3}{4.3} = \frac{3}{12}$$

y

$$\frac{5}{6} = \frac{5.2}{6.2} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{3+10}{12} = \frac{13}{12}$$

De forma genérica, si queremos sumar $\frac{p}{q}$ con $\frac{r}{s}$,donde m.c.m.(q,s)=d, nos quedaría

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{\frac{d}{q}.p}{d} + \frac{\frac{d}{s}.r}{d} = \frac{\frac{d}{q}.p + \frac{d}{s}.r}{d}$$

Si bien esta última expresión parece complicada, es importante reconocer que lo que se generaliza es el proceso de buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Cuando estamos trabajando con fracciones numéricas, el procedimiento no es difícil, como se puede observar en el último ejemplo.

Podemos resumir los casos en: Definimos la suma de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ como $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p.s+q.r}{q.s}$, pero recordamos que si m.c.d.(q, s)$\neq$ 1, se podemos utilizar un denominador más pequeño que $q.s$

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{3} = \frac{2.3+4.7}{7.3} = \frac{34}{21}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{1.9+4.6}{6.9} = \frac{33}{54} = \frac{11}{18}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{9} = \frac{2.9-5.5}{5.9} = -\frac{7}{45}$$

Para la resta de fracciones se trabaja de la misma manera.

Para restar $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ podemos hacer: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2.3-1.5}{5.3} = \frac{1}{15}$

Actividades

25. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{7}+\frac{10}{7}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{6}{7}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2}-\frac{2}{5}$

e) $-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$

Propiedades de la suma

Las propiedades de la suma que se cumplían en los enteros, siguen cumpliéndose en los números racionales, es decir, dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tenemos que:

- Ley de cierre: la suma dos números racionales, es otro número racional.
- Propiedad asociativa: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$.
- Propiedad conmutativa: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$
- Elemento neutro"0": $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$
- Existencia de inverso aditivo o elemento opuesto: el opuesto de $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ es $-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

$$\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\text{Conmutativa}}=\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{\text{Asociativa}}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}_{\text{Conmutativa}}=\overbrace{\frac{1+1}{2}+\frac{-3-1}{4}}^{\text{Asociativa}}=\underbrace{1-1}_{\text{Opuesto}}=\underbrace{0}_{\text{Neutro}}\in\mathbb{Q}$$

Producto

Si queremos multiplicar dos números racionales en su expresión fraccionaria, debemos multiplicar el numerador con el numerador, y el denominador con el denominador. Es decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$

Previo a realizar el producto conviene verificar si es posible simplificar los factores, es decir simplificar un factor de algún numerador con un factor de algún denominador.

$$\frac{3}{5}.\frac{7}{6}=\frac{\cancel{3}}{5}.\frac{7}{\underbrace{\cancel{6}}_{2}}=\frac{1}{5}.\frac{7}{2}=\frac{1.7}{5.2}=\frac{7}{10}$$

Actividades

26. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3}.\frac{6}{7}$

b) $\frac{1}{5}.\frac{10}{3}.\frac{6}{5}$

c) $\frac{4}{6}.\frac{3}{16}$

d) $-\frac{7}{11}.\frac{110}{5}$

Propiedades del producto

Para el producto en los racionales, siguen valiendo las propiedades que valían en los enteros, es decir, dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tenemos que:

- Ley de cierre: producto de dos racionales es racional.
- Propiedad asociativa: $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$.
- Propiedad conmutativa: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b}$
- Existencia del neutro "1": $\frac{a}{b}.1 = \frac{a}{b}$

$$\frac{1}{2}.\underbrace{\frac{3}{7}.\frac{6}{5}}_{\substack{\downarrow\\ \text{Conmutativa}}} = \frac{1}{2}.\underbrace{\frac{6}{5}.\frac{3}{7}}_{\downarrow} = \overbrace{\frac{6}{10}}^{\substack{\text{Asociativa}\\ \uparrow}}.\frac{3}{7} = \underbrace{\frac{18}{70} \in \mathbb{Q}}_{\substack{\downarrow\\ \text{Ley de cierre}}}$$

Se agrega además la siguiente propiedad:

a) Existencia del inverso multiplicativo: Dado un racional $\frac{p}{q}$ con $p \neq 0$ y $q \neq 0$ y la definición de producto, existe el racional $\frac{q}{p}$ tal que $\frac{p}{q}.\frac{q}{p} = \frac{p.q}{q.p} = 1$. En otras palabras, cada número racional no nulo admite un inverso multiplicativo.

> El inverso multiplicativo de $\frac{4}{9}$ es $\frac{9}{4}$.

> El inverso multiplicativo $\frac{-3}{5}$ es $\frac{-5}{3}$.

En parte de la bibliografía al inverso multiplicativo se lo conoce como recíproco.

Actividades

27. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{7}.\frac{14}{4}\right).\frac{12}{5}$

b) $-\frac{3}{5}.\left(-\frac{2}{15}.\frac{3}{8}\right)$

c) $\left(\frac{3}{2}.\frac{3}{27}\right).\frac{8}{5}$

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma

Esta propiedad distributiva sigue valiendo en el conjunto de los números racionales.

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$$

Así como la resta en enteros surgió a partir de que la suma admitía un opuesto, vamos a definir la división en los racionales a partir de la propiedad de que en los racionales existe el inverso multiplicativo.

Actividades

28. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3}.\left(\frac{15}{4}+\frac{9}{2}\right)$

b) $-\frac{7}{11}.\left(\frac{22}{3}-\frac{11}{7}\right)$

c) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{15}\right).\frac{10}{3}$

División

Si tenemos p y q dos números racionales, pensamos a la división entre p y q como

$$p:q=\frac{p}{q}=p.\frac{1}{q}$$

es decir, dividir p por q es lo mismo que multiplicar p por el inverso multiplicativo de q.

> Si queremos dividir $\frac{1}{7}$ con $\frac{4}{5}$ lo que haremos es
>
> $$\frac{1}{7}:\frac{4}{5}=\frac{1}{7}.\underbrace{\frac{5}{4}}_{\substack{inv.\\ mult.\\ de\,\frac{4}{5}}}=\frac{1.5}{7.4}=\frac{5}{28}$$

De manera genérica, para dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ vamos a multiplicar por el inverso del divisor, que en este caso es $\frac{d}{c}$. Obtenemos así

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$$

Cuidado! Siempre el que cambia por su opuesto multiplicativo al convertirse en producto es el divisor. No es indistinto cuál cambiamos.

Notemos que dados tres números enteros a, b y c con $c \neq 0$, tenemos que

$$(a+b):c = (a+b).\frac{1}{c} = \frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

No vale lo mismo cuando la suma está en el denominador, es decir $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

Actividades

29. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{4} : \frac{5}{12}$

b) $-\frac{11}{2} : \frac{22}{6}$

c) $\frac{3}{7} : \left(-\frac{1}{21}\right)$

d) $\frac{9}{13} : \frac{3}{26}$

30. Calcula

a) $\frac{5}{(3+2)} + \frac{3+2}{5}$

b) $\frac{5 \cdot 3}{(3+2)} + \left(\frac{3+2}{5}\right) : \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$

d) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$

e) $\frac{3-\frac{8}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{16}\right)}{\frac{1}{2}-4.\left(3-\frac{3}{32}\right)} + \frac{2}{5}$

f) $\frac{2-4.\left(3+\frac{5}{2}\right)}{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}.(8-6)}$

Propiedades de la potencia con base en los racionales y exponente natural

En el caso de un número racional con potencia natural, se mantienen las propiedades de la potencia que definimos en el conjunto de los números enteros.

Se agrega además la siguiente propiedad:

Si $\frac{p}{q}$ es un número racional, y n natural, $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{p}{q}\right). \ldots . \left(\frac{p}{q}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{p \ldots p}{q \ldots q} = \frac{p^n}{q^n}$ por lo tanto

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$$

Es decir, la potencia es distributiva con respecto al cociente.

$$\left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{2^5}{7^5}$$

Propiedades de la potencia con base en los racionales y exponente entero

Sabemos que para todo $a \neq 0$ podemos escribir al número 1 como $1 = a.\frac{1}{a}$ Además tenemos que $a^0 = 1$, con los cual $a^0 = a.\frac{1}{a} = a^1.\frac{1}{a}$ Si queremos determinar si la expresión $\frac{1}{a}$ es alguna potencia de a que desconocemos, entonces llamemos n a esa potencia y asumamos como válidas todas las propiedades vistas hasta ahora. Es decir, $\frac{1}{a} = a^n$ para cierto n que queremos averiguar. Entonces, $a^0 = a.\frac{1}{a} = a^1.\frac{1}{a} = a^1.a^n = a^{1+n}$.

Esto implica que $a^0 = a^{n+1}$, de donde $0 = n + 1$ o $n = -1$. De esto deducimos que: $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Entonces como $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de a, tenemos que a^{-1} es el inverso multiplicativo de a.

La introducción de un inverso multiplicativo nos permite definir potencias negativas.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

La definición de a^{-1} nos permite calcular potencias enteras. Para calcular a^{-n} pensemos lo siguiente:

$$a^{-n} = a^{(-1).n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

De esta manera se aplican las propiedades ya vistas hasta el momento a un conjunto más amplio: potencias de base racional y exponente entero.

Actividades

31. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $z^4.z^6$

b) $a^7 : a^4$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5.\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}.\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

d) $(3^{-5}.3^{-2})^{-6} : [(5-2)^2]^{-7}$

e) $[(3+\pi)^6 : (3+\pi)^{-2}]^5$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$

32. Expresa $(a^3.b^2)^{-2}$ como producto de potencias.

33. Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo

a) $\left(\frac{9}{4x}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{-3}$

34. Simplifica y calcula en forma exacta:

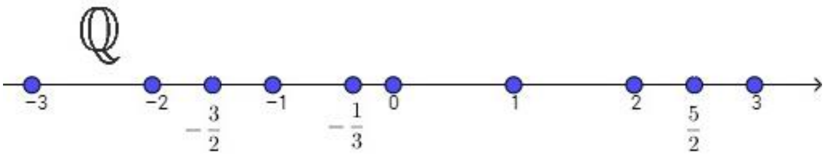
a) $\frac{2^3.2^7.2^{-3}.2^5}{2^4.2^6.2^{-2}.2^9}$

b) $\frac{2^3.3^5.5^2.11}{2^2.3^3.5^2.7}$

c) $(6.5^3 + 20.5^2 - 25.5): \frac{5^5}{5^2}$

d) $[14.7^3 + 2.7^4 + 3.49.7^2].(7^{-1})^5$

Orden y recta numérica



Se puede establecer un orden en el conjunto de los números racionales, es decir, dados dos números racionales, se puede determinar cuál es más grande, o si son iguales.

Si queremos comparar dos fracciones, podemos hacerlo a simple vista en muchos casos. Por ejemplo, una fracción positiva será siempre mayor que una negativa; o dos fracciones que tengan el mismo denominador, será mayor aquella cuyo numerador sea mayor; etc.

Cuando queramos comparar fracciones en general es aconsejable comparar las fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador ya que será el orden del numerador el que establezca cuál de los números racionales será mayor o menor que el otro.

Si tenemos $\frac{13}{24}$ *y* $\frac{5}{9}$ *¿Cuál es mayor?*

El m.c.m.(24,9)=72 (ya que 72=24.3, y 72=9.8). Entonces buscamos las fracciones equivalentes

$$\frac{13}{24} = \frac{13.3}{24.3} = \frac{39}{72} \quad y \quad \frac{5}{9} = \frac{5.8}{9.8} = \frac{40}{72}$$

De donde podemos deducir que $\frac{13}{24} = \frac{39}{72} < \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$

Otra manera de comparar fracciones es aplicando el siguiente principio:

$$a \leq b \text{ si y solo si } b - a \geq 0$$

Así para el mismo ejemplo podríamos hacer

$$\frac{13}{24}-\frac{5}{9}=\frac{13.3-8.5}{72}=\frac{39-40}{72}=-\frac{1}{72}$$

y como el resultado es negativo, entonces $\frac{13}{24}<\frac{5}{9}$.

Actividades

35. Compara las siguientes fracciones:

 a) $\frac{11}{30}$ y $\frac{7}{20}$

 b) $\frac{3}{10}$ y $\frac{5}{16}$

 c) $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{12}$

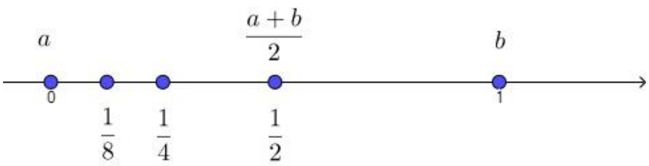
36. Trabajando con números fraccionarios, ordena de forma creciente los siguientes números. Justifica con fracciones equivalentes.

 a) $\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$; -1 ; 2 ; $\frac{5}{3}$

 b) $\frac{5}{1};\frac{2}{3};\frac{9}{3};\frac{4}{8};\frac{6}{6};\frac{12}{1000}$

Densidad de $\mathbb{Q}$

Hasta ahora, entre dos números enteros consecutivos de la recta numérica no hay ningún otro número entero. Ahora, tomemos el 0 y el 1, y notemos que $\frac{1}{2}$ está entre ellos y es el punto medio del segmento que une ambos puntos. Ahora el $\frac{1}{4}$, estará entre el 0 y el $\frac{1}{2}$. El $\frac{1}{8}$ estará entre el 0 y el $\frac{1}{4}$ y así sucesivamente. Lo mismo podemos hacer entre dos números racionales cualesquiera.



Es más, si consideremos dos racionales cualesquiera a y b, el punto medio entre a y b lo podemos calcular como $\frac{a+b}{2}$ y es un número que se ubica en la mitad del segmento que une a con b. Por la Ley de cierre, este número es racional, por lo que podemos afirmar que entre dos racionales cualesquiera hay al menos un racional.

La consecuencia de construir los puntos medios entre dos números racionales dados no tiene fin, ya que siempre puedo calcularlos, independientemente de cuán cerca estén los números en cuestión. Esta propiedad se conoce como **densidad** en la recta numérica. Es decir: para cualquier par de números racionales existe otro número racional situado entre ellos en la recta real.

Actividades

37. Calcula qué fracción de la unidad representa:

a) La mitad

b) La mitad de la mitad.

c) La tercera parte de la mitad.

d) La mitad de la cuarta parte.

38. Ubica a los números 1 y 6 sobre la recta numérica.

a) ¿Cuál es el punto medio? Ubícalo en la recta.

b) Encuentra el punto medio entre 1 y 7/2. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.

c) Encuentra el punto medio entre 9/4 y 7/2. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.

d) Encuentra el punto medio entre 9/4 y 23/8. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.

¿Podrías continuar este procedimiento? ¿Cuántas veces?

Expresión decimal de un número racional

Todo número racional puede ser representado como fracción y como número decimal.

La parte **entera** de un número racional corresponde a las cifras de la izquierda de una coma (o punto en calculadoras o computadoras) y es un número entero y la parte **decimal** o fraccionaria, corresponde a las cifras posteriores o a la derecha de la coma.

Los números decimales se clasifican en 3 grandes grupos: **exactos**, con la parte decimal finita, **periódicos**, que se subdividen en periódicos puros y periódicos mixtos dependiendo de la repetición de sus números, y **no periódicos**, que son aquellos números con la parte decimal infinita y no periódica (estos últimos son los números irracionales que se estudiarán en la próxima sección).

Los decimales **periódicos puros** son los números en los que la parte decimal se repite periódicamente, inmediatamente después de la coma. Y los decimales **periódicos mixtos** son los números en cuya parte decimal hay una parte no periódica y otra periódica.

$\frac{1}{8} = 0{,}125$ (Número racional con parte decimal finita)

$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}\hat{3}$ (Número racional periódico puro)

$\frac{111}{90} = 1{,}233333\ldots = 1{,}2\hat{3}$ (Número racional periódico mixto)

Cifras decimales

Décima	→	$10^{-1} = 0{,}1$
Centésima	→	$100^{-1} = 0{,}01$
Milésima	→	$1000^{-1} = 0{,}001$

Obtener la expresión fraccionaria de un número decimal exacto es sencillo. Basta con multiplicar y dividir por la misma potencia de 10 (el exponente está relacionado con la cantidad de dígitos que hay después de la coma) y luego ver si se puede simplificar la expresión.

$$4{,}5 = 4{,}5\ .\ \frac{10}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$$

$$1{,}24 = 1{,}24\ .\ \frac{100}{100} = \frac{124}{100} = \frac{31}{25}$$

Tanto los números decimales periódicos puros como los decimales periódicos mixtos siempre pueden ser expresados en forma de fracción y para ellos veremos un método que se aplica para todos los casos. Veamos primero algunos ejemplos:

Caso 1: Periódico puro 1,3333…

Llamemos $n = 1,\hat{3}$. Multiplicando por 10 a ambos miembros y luego le restaremos a la nueva expresión, la expresión que teníamos anteriormente. Entonces

$$n = 1,\hat{3}$$

$$10.n = 13,\hat{3}$$

$$10.n - n = 13,\hat{3} - 1,\hat{3}$$

$$9.n = 12$$

$$n = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Caso 2: 0,5252525252…

Llamemos $n = 0,\widehat{52}$. Como hay dos dígitos dentro de la parte periódica, multiplicaremos en este caso por 10^2 para así obtener la misma parte periódica después de la coma, y luego operamos de manera similar al ejemplo anterior. Tenemos entonces

$$n = 0,\widehat{52}$$

$$100.n = 52,\widehat{52}$$

$$100n - n = 52,\widehat{52} - 0,\widehat{52}$$

$$99n = 52$$

$$n = \frac{52}{99}$$

Caso 3: Periódico mixto 0,23333…

Llamemos $n = 0{,}2\hat{3}$. En este caso, primero multiplicaremos por 10 a ambos miembros, para que nos quede así un periódico puro (la coma pegada al período), y luego seguiremos trabajando como en los ejemplos anteriores. Entonces

$$n = 0{,}2\hat{3}$$

$$10n = 2,\hat{3}$$

$$100n = 23,\hat{3}$$

$$100n - 10n = 23,\hat{3} - 2,\hat{3}$$

$$90n = 21$$

$$n = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

Resumiendo los pasos:

1. Multiplicamos ambos miembros por potencias de 10, en caso de ser necesario, hasta que la coma este inmediatamente delante del período.
2. Multiplicamos ambos miembros por potencias de 10, para obtener un número con la misma parte periódica que el que teníamos en el paso anterior.
3. Restamos las expresiones obtenidas logrando que nos queden números enteros
4. Dividimos ambos miembros de la igualdad obtenida por la constante que multiplica al n y obtenemos así la fracción buscada (simplificamos en el caso de ser posible).

En resumen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Entero}\\[1em] \text{Decimal}\begin{cases}\text{Exacto}\\ \text{Periódico}\begin{cases}\text{Puro}\\ \text{Mixto}\end{cases}\\ \text{No periódico}\end{cases}\end{array}\right\}\text{Número Racional}$$

Actividades

39. Escribe los siguientes números en su expresión fraccionaria
   a) $0,\hat{7}$
   b) $3,\widehat{42}$
   c) $2,1\hat{3}$
   d) $3,\hat{9}$
   e) $1,2\widehat{35}$
   f) $0,2\hat{3}$
   g) $0,\widehat{23}$
40. Trabajando con números fraccionarios, ordena de forma creciente los siguientes números. Justifica con fracciones equivalentes.
   a) $\frac{4}{33}$; $0,\widehat{33}$; $\frac{12}{97}$
   b) $2,4\hat{9}$; $-\frac{49}{20}$; $\frac{67}{26}$
41. Escribe el número $0,\hat{9}$ en su expresión fraccionaria y responde:
   a) ¿Qué número es más grande $0,\hat{9}$ o 1?
   b) ¿Es posible encontrar un número racional entre $0,\hat{9}$ y 1?

Simbolización matemática de expresiones con números racionales

Retomando la modelización estudiada con los números naturales y enteros ahora analizaremos situaciones que involucran expresiones racionales.

Halla una expresión que permita simbolizar las siguientes situaciones:

- *"Dado un número racional consideremos la tercera parte de su cuadrado, más 2."*

En este caso utilizamos la variable l *para describir el número racional buscado. Como se pide la tercera parte de su cuadrado, al número primero se lo eleva al cuadrado y luego se lo divide por 3, es decir* $\frac{l^2}{3}$*. Por último, le sumamos dos unidades, obteniendo entonces la siguiente expresión*

$$\frac{l^2}{3} + 2 \; con \; l \in \mathbb{Q}.$$

- *"El nuevo precio de un producto que sufre un aumento de la cuarta parte de su valor inicial."*

Definimos p *como el precio inicial del producto y* m *como el precio final del mismo. Al tener un aumento de la cuarta parte de su valor inicial, le sumamos* $\frac{1}{4}$ *de* p *al precio original, de donde tenemos que*

$$m = p + \frac{1}{4}p.$$

Esta misma expresión se puede expresar como $m = p\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}p.$

- *"La suma de un número entero y su anterior, al cuadrado."*

Llamaremos n *al número entero, con lo cual su anterior será* $n - 1$*. Notemos que la coma después de la palabra anterior nos dice que primero hay que realizar la suma, y luego elevar a la misma al cuadrado. Expresamos entonces al enunciado como*

$$(n + n - 1)^2.$$

- *"La suma de un número entero y su anterior al cuadrado."*

A diferencia del caso anterior, no hay una coma, por lo que la frase al cuadrado solo afecta al concepto de anterior. Es decir, si nuevamente llamamos n *al número entero en cuestión, y* $n - 1$ *a su anterior, tenemos que la situación planteada queda expresada como:*

$$n + (n - 1)^2.$$

Porcentaje

El término porcentaje tiene un significado matemático y se emplea con mucha frecuencia en todo tipo de operaciones cotidianas, como hacer compras, calcular el descuento de un producto o realizar algún cálculo contable.

El símbolo matemático del porcentaje es %, siempre acompaña a una cantidad numérica: 5%, 10%, 13%.... En el lenguaje corriente "porcentaje" equivale a tanto por ciento. Hay que tener en cuenta que porcentaje hace referencia a una cantidad, concretamente 100, puesto que el porcentaje de una cantidad con respecto a otra quiere decir que de cada 100 partes nos referimos a una cantidad determinada. Por ejemplo el 2% de pulpa de naranja en un jugo serían dos partes de pulpa de naranja de cada 100 partes del jugo.

La cantidad indicada en un porcentaje siempre tiene relación con otra cantidad, pues se trata de calcular el porcentaje de una cosa con respecto a otra. No puede decirse 30% y no especificar respecto de qué se refiere. De esta manera, necesitamos saber el 10% de 7000 ó el 4% de 500.

En el segundo ejemplo de simbolización se introdujo la noción de aumento en determinada proporción de una cierta cantidad. Vimos que si una cantidad a aumentaba una fracción $\frac{p}{q}$ de la misma, el valor resultante era $a\left(1+\frac{p}{q}\right)$.

Si consideramos que $\frac{1}{2}$ es la mitad de uno, podemos expresarlo de manera equivalente a $\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{50}{100}$. El $\frac{50}{100}$ de una cantidad a, calculado a través de $\frac{50}{100}\cdot a$ es la mitad de a y se denomina 50 porciento de a y también se dice que es el 50% de a. Decir que queremos calcular el 20% de a debemos hacer $\frac{20}{100}\,.\,a$

Sea c un número positivo. Consideremos una cantidad a que sufre un <u>aumento</u> del c%. En este caso, el nuevo valor de a es

$$a+\frac{c}{100}a \;=\; a\left(1+\frac{c}{100}\right)$$

Si en cambio se trata de un <u>descuento</u> del c%, tendremos

$$a-\frac{c}{100}\,a \;=\; a\left(1-\frac{c}{100}\right)$$

Consideremos dos aumentos consecutivos de una cantidad en porcentajes c_1% y c_2%, respectivamente. Cuando se trata de aumentos sucesivos se entenderá que el segundo aumento se realiza sobre el valor correspondiente a la cantidad que ya sufrió el primer aumento. Entonces, la cantidad a se transforma luego del primer aumento en

$$a+\frac{c_1}{100}a \;=\; a\left(1+\frac{c_1}{100}\right)$$

Esta nueva cantidad es la que sufre el segundo aumento, con lo cual, $a+\frac{c_1}{100}a$ es aumentada en $\frac{c_2}{100}$ veces de ese valor, con lo que tenemos que luego del segundo aumento tenemos,

$$\left[a+\frac{c_1}{100}\,a\right]+\frac{c_2}{100}\left[a+\frac{c_1}{100}\,a\right]$$

Lo que está entre corchetes puede ser escrito como factor común, de modo que podemos escribir los aumentos consecutivos como

$$a\left(1+\frac{c_1}{100}\right)\left(1+\frac{c_2}{100}\right)$$

Si quisiéramos ver cuál sería el aumento equivalente, es decir el aumento que debería haber sufrido para que el resultado sea el mismo que los dos aumentos consecutivos, deberíamos igualar

$$a\left(1+\frac{c_1}{100}\right)\left(1+\frac{c_2}{100}\right) = \; a\left(1+\frac{c}{100}\right)$$

Un método alternativo para calcular el porcentaje acumulado es el siguiente:

Si $a \neq 0$ tenemos que

$$\left(1+\frac{c_1}{100}\right)\left(1+\frac{c_2}{100}\right)=\left(1+\frac{c}{100}\right) \quad \rightarrow \quad 1+\frac{c_1}{100}+\frac{c_2}{100}+\frac{c_1 \cdot c_2}{100 \cdot 100}=\left(1+\frac{c}{100}\right).$$

Entonces,

$$\frac{c}{100}=\frac{c_1+c_2}{100}+\frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100} \qquad \rightarrow \qquad c\ =\ c_1+c_2+\frac{c_1 \cdot c_2}{100}$$

que <u>no</u> es simplemente la suma de los porcentajes.

> Si tenemos dos aumentos consecutivos: el primero del 20% y luego del 50% tendremos que el aumento acumulado será
> $$20+50+\frac{20 \cdot 50}{100}\ =\ 20+50+10\ =\ 80$$
> es decir, el aumento equivalente es de 80%.
>
> Notemos que no es simplemente 70% como si fuera la suma directa, sino que el aumento sucesivo hace que aumente más.

En el caso de los descuentos sucesivos, notemos que dos descuentos sucesivos del 50% no significa que algo salga gratis, ya que el segundo descuento es sobre la mitad del valor original. Veamos, del mismo modo que efectuamos aumentos consecutivos, podemos ver que si una cantidad sufre dos descuentos consecutivos el valor final será

$$a\left(1-\frac{c_1}{100}\right)\left(1-\frac{c_2}{100}\right)=a\left(1-\frac{c}{100}\right).$$

Tal como vimos en el caso anterior, el descuento acumulado se puede calcular de modo alternativo.
Si $a \neq 0$ tenemos que

$$\left(1-\frac{c_1}{100}\right)\left(1-\frac{c_2}{100}\right)=\left(1-\frac{c}{100}\right) \qquad \rightarrow \qquad 1-\frac{c_1+c_2}{100}+\frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100}\ =\ 1-\frac{c}{100}$$

Entonces,

$$\frac{c}{100}=\frac{c_1+c_2}{100}-\frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100} \qquad \rightarrow \qquad c\ =\ c_1\ +c_2-\frac{c_1 \cdot c_2}{100}.$$

> Dos descuentos consecutivos del 50 % resultan en un descuento acumulado del 75% ya que $50+50-\frac{50.50}{100}=75$.

Observar que la aplicación de aumentos y/o descuentos consecutivos es conmutativa, o sea que es lo mismo primero aplicar un aumento del 5% a una cierta cantidad y luego un descuento del 10% al resultado anterior, que primero hacer un descuento del 10% y luego aplicar un aumento del 5% del valor obtenido.

Actividades

42. Considera una cierta cantidad A. Escribe las expresiones de B correspondientes a las siguientes situaciones

    a) B es la mitad de A.

b) B es la tercera parte de A, más 5.

c) B es el 25% del triple de A.

d) B se obtiene a partir de A adicionando un 30%.

e) B se obtiene a partir de A aumentado en un 10% primero y un 20% después.

f) B se obtiene a partir de A restando un 30%.

g) B se obtiene a partir de A restando en un 10% primero y un 20% después.

h) B se obtiene de aplicar tres aumentos consecutivos del 10 % de A.

i) B se obtiene de aplicar n aumentos consecutivos del 10% de A.

43. Un producto sufre dos aumentos consecutivos del 5% y del 10% respectivamente. Luego sufre un descuento del 12 %. ¿En cuánto se modificó el valor original? ¿Cuál es el porcentaje de aumento que sufrió?

44. ¿Cuál es el costo final de una moto de 9000 dólares si se otorga un descuento del 5% y se le aplica el 9% de impuestos a las ventas? ¿El aumento que tuvo la moto fue del 4%?

Reales

El conjunto de los números reales incluye a los conjuntos numéricos que estudiamos antes: los naturales, enteros y racionales (que se pueden agrupar en el conjunto de racionales $\mathbb{Q}$) a los que se agrega otro conjunto, que llamaremos $\mathbb{I}$, de números irracionales. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = (-\infty, \infty).$$

Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$

En el conjunto de los números reales son válidas las mismas propiedades que estudiamos en los conjuntos anteriores para la suma y el producto.

Propiedades para la suma:

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{c} Ley\ de\ cierre \\ a + b = b + a \\ (a + b) + c = a + (b + c) \\ a + 0 = a \end{array} \right. \\ Existencia\ de\ opuesto \end{array} \right.$$

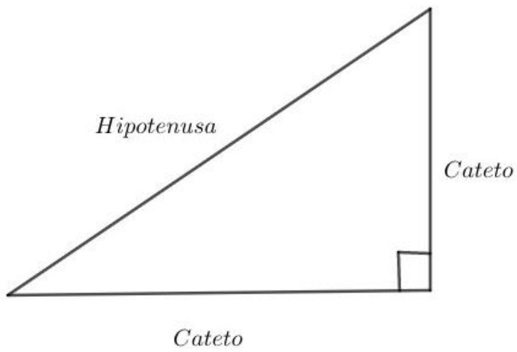
Propiedades para el producto:

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N}, \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{c} Ley\ de\ cierre \\ a.b = b.a \\ (a.b).c = a.(b.c) \\ a.1 = a \end{array} \right. \\ Existencia\ de\ inverso \end{array} \right.$$

Conjunto de números irracionales

El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de **números irracionales**, es decir que no eran racionales a partir del estudio de las longitudes de los lados de un triángulo. Los números irracionales se definen como aquellos números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, y por lo tanto no pueden ser expresados como fracciones. Posteriormente fue llamado irracional, por no poder ser escrito como una razón o fracción. Notaremos con la letra $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales.

Recordemos que en un triángulo rectángulo, es decir, un triángulo en el cual uno de sus ángulos es recto, mide 90°, al lado opuesto a ese ángulo de lo llama hipotenusa y a los dos lados restantes se los llama catetos.



El **Teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos. Es una de las proposiciones más conocidas de las que tienen nombre propio de la matemática.

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

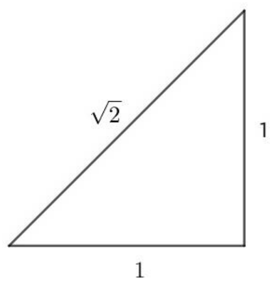
Pitágoras - Siglo V AC

Si un cateto mide 3 cm, y otro mide 4 cm, entonces la hipotenusa mide 5cm, ya que

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Si ambos catetos miden 1cm, entonces $c^2 = 1^1 + 1^1 = 2$, es decir que debe existir algún número cuyo cuadrado sea 2. Este número buscado no pertenece a ninguno de los conjuntos numéricos estudiados hasta ahora.

En el ejemplo anterior vimos que la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos valen 1 es $\sqrt{2}$, que es un número irracional (en el Anexo del Capítulo 1 se demuestra el por qué lo es). Vemos entonces que algunos números irracionales pueden ser dibujados con precisión.



En el Anexo del Capítulo 1 se desarrolla el método para graficar algunos de estos números.

Otros ejemplos de números irracionales son:

$$\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$$

$$\sqrt{11} - \sqrt{3} = 1{,}5845739828\ldots$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749\ldots$$

El número áureo o número de oro, representado por la letra griega Φ (fi) en honor al escultor griego Fidias, que participó en la construcción del Partenón de Atenas donde se utilizó esta proporción, es un número irracional que aparece regularmente en la arquitectura, en la naturaleza, en el arte y en objetos de uso cotidiano.

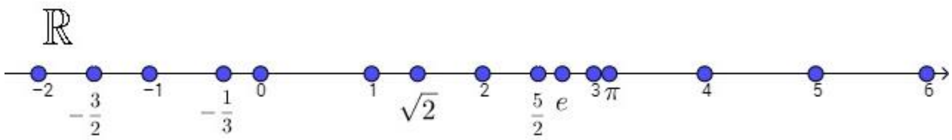
Recordemos entonces que definimos los **Números Reales**, que notamos $\mathbb{R}$, como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Notemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos disjuntos, es decir que no hay ningún número que sea a la vez racional e irracional. Podemos entonces decir que los irracionales son el complemento de los racionales, en los reales.

El conjunto de los números irracionales no es cerrado (es decir, no cumple la ley de cierre) con la suma ni con el producto. Por ejemplo $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son números irracionales, pero $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$ y $\sqrt{2}.\left(-\sqrt{2}\right) = -2$ y tanto 0 como -2 son números racionales.

Ahora que tenemos definidos los números irracionales, nos queda realmente completa la recta real. Es decir, en la recta numérica, cualquier valor que tome es real, ya sea racional o irracional.



El conjunto de los números reales también es un conjunto totalmente ordenado, puesto que se puede determinar que entre dos reales diferentes uno es mayor que el otro, al representarse en la recta, es posible ordenar siguiendo el mismo orden que el establecido en el conjunto de los números racionales.

Dados dos números reales a y b, diremos que b es mayor que a si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, b queda situado a la derecha de a o si $b - a > 0$.

Operaciones en el conjunto de los números reales

En el conjunto de los números reales valen las operaciones y propiedades ya descriptas en los conjuntos numéricos anteriormente vistos y además está definida la operación de radicación.

Radicación

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Y consiste en hallar un número llamado **raíz**, dados otros dos, llamados **radicando** e **índice**, tal que, ese número elevado al índice, sea igual al radicando:

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$$

En la raíz cuadrada el índice es 2, aunque en este caso se omite escribirlo.

$$\sqrt{Radicando} = Raíz$$

Hallar la raíz cuadrada de un número $b \geq 0$ consiste en encontrar un número real positivo a tal que su cuadrado sea el radicando b:

$$\sqrt{b} = a \quad \leftrightarrow \quad a^2 = b.$$

Si $b = 0$ entonces $a = 0$.

> $\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 4$
>
> $\sqrt{81} = 9$ ya que $9^2 = 81$

En general si el signo de a es desconocido, y queremos hallar un número b, tal que

$$a^2 = b \text{ entonces } \sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Raíz enésima de un número real

Queremos generalizar lo visto con la raíz cuadrada para raíces de otros índices. Tenemos diferentes casos de acuerdo la paridad del índice y el signo del radicando.

- Raíces de índice par:

  Si el radicando es negativo, no existe raíz cuadrada real, puesto que ningún número real elevando a la segunda potencia puede ser un número real negativo.

  > $\sqrt{-25}$ no pertenece a los reales.

  Las raíces de índice par se definen de forma similar a las raíces cuadradas. Se concluye que no existe raíz real de índice par si el radicando es negativo.

  > El número 81 es el resultado de elevar a la cuarta potencia el número 3. Así el número 3 es la raíz cuarta de 81, $\sqrt[4]{81} = 3$.

- Las raíces de índice impar:

  Se definen de forma similar a las raíces de índice par, con la consideración de que el radicando sí puede ser negativo y en ese caso la raíz también es negativa.

  > El número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así el número 5 es la raíz cúbica de 125,$\sqrt[3]{125} = 5$.Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo al número -5. Así el número -5 es la raíz cúbica de -125, $\sqrt[3]{-125} = -5$.

<u>Signo de la raíz:</u> Para averiguar cuál es el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice.

Raíz	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[4]{16} = 2$	$\sqrt[4]{-16} = ?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	$+$	$-$	$+$	$-$
Número y signo de raíces reales	Una y signo $+$	Una y signo $-$	Una y signo $+$	Ninguna

Podemos concluir:

- ✓ Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- ✓ Si el índice es par y el radicando es positivo, existe una raíz real que es positiva.
- ✓ Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Actividades

45. Indica el signo de las raíces de estos números reales y halla el valor si es posible.

a) $\sqrt{\frac{11}{13}}$ b) $\sqrt[4]{-\frac{13}{18}}$ c) $\sqrt{\frac{1052}{4208}}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$

f) $\sqrt[8]{-\frac{108}{172}}$ g) $\sqrt[3]{-\frac{111}{333}}$ h) $\sqrt[4]{-\frac{625}{81}}$ i) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

Como la radicación y la potencia son operaciones ligadas entre sí por definición, se tiene que las propiedades de la potencia se cumplen también con la radicación, siempre que el radicando de las raíces pares sea positivo. Vamos a definir las siguientes operaciones y propiedades considerando que los factores involucrados en estas operaciones existen.

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, es decir:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

En esta propiedad se hace evidente el por qué se pide que el radicando sea positivo. Por ejemplo $\sqrt{36} \neq \sqrt{-6}\,.\sqrt{-6}$ ya que $\sqrt{-6}$ no existe en $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{3^2.2^4} = \sqrt{3^2}.\sqrt{2^4} = \sqrt{9}.\sqrt{16} = 3.4 = 12$$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera: $\sqrt{3^2.2^4} = \sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12$

En general $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador con la raíz del denominador, es decir:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Raíz de una raíz

La raíz de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces, es decir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$$

Actividades

46. Calcula

a) $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

b) $\frac{6\sqrt{5}.6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$

d) $\sqrt{2}(3 - 4\sqrt{5})$

e) $(2 + 3\sqrt{2}).(5 - \sqrt{2})$

f) $(2 + \sqrt{3})^2$

g) $(6 + \sqrt{2}).(6 - \sqrt{2})$

47. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifica en el caso de veracidad y da un contraejemplo para justificar la falsedad.

a) $\sqrt[4]{16} = 2$

b) $\sqrt[6]{(-4)^6} = -4$

c) $\sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

d) $\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2.3$

e) $(2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 5$

Extracción e introducción de factores de un radical

En determinados cálculos es conveniente extraer factores de un radical. Para ello es necesario que el exponente del factor sea mayor o igual que el índice del radical. Veamos en los siguientes ejemplos cómo se procede.

$$\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3.5} = \sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5} = 5.\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt{5^7} = \sqrt{5^2.5^2.5^2.5} = \sqrt{5^2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{5} = 5.5.5.\sqrt{5} = 5^3.\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{7^6.5^5} = \sqrt[3]{7^6}.\sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{7^3.7^3}.\sqrt[3]{5^3.5^2} = \sqrt[3]{7^3}.\sqrt[3]{7^3}.\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5^2} = 7.7.5.\sqrt[3]{5^2} = 7^2.5.\sqrt[3]{5^2}$$

Podemos extraer un factor de un radical si su exponente es igual al índice de la raíz y lo escribimos como factor del radical elevado a la unidad.

Recordemos que si la raíz es par, y no conocemos el signo del factor, debemos usar valor absoluto, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

$$\sqrt[n]{a^n.b} = |a|.\sqrt[n]{b}$$

Siempre que sea posible extraeremos los factores de un radical para simplificar el radicando.

Extrae todos los factores posibles de los radicales

$$\sqrt{500} \ y \quad \sqrt{\frac{512}{45}}$$

Puesto que $500 = 2^2.5^3$, *tenemos que* $\sqrt{500} = \sqrt{2^2.5^3} = 2.5.\sqrt{5} = 10.\sqrt{5}$

Del mismo modo tenemos: $\sqrt{\frac{512}{45}} = \sqrt{\frac{2^9}{3^2.5}} = \frac{\sqrt{2^9}}{\sqrt{3^2.5}} = \frac{2^4.\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{2^4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$

En resumen, para extraer factores de un radical:

- ✓ Descomponemos en factores el radicando.
- ✓ Si hay un factor cuyo exponente es mayor o igual que el índice de la raíz, dividimos dicho exponente por el índice de la raíz.
- ✓ El cociente de esta división será el exponente del factor fuera del radical.
- ✓ El resto de la división será el exponente del factor dentro del radical.

De la misma manera que hemos extraído factores de un radical, también podemos introducir factores en él. Observemos el procedimiento:

$$3^2.5^3.a^4.\sqrt{b} = \sqrt{(3^2)^2\ .(5^3)^2.(a^4)^2.b} = \sqrt{3^4.5^6.a^8.b}$$

$$3^2.5^3.a^4.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(3^2)^3\ .(5^3)^3.(a^4)^3.b} = \sqrt[3]{3^6.5^9.a^{12}.b}$$

Para introducir un factor en un radical se eleva dicho factor al índice del radical. Es decir $a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}$.

Actividades

48. Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales.

a) $3^2.\sqrt{5^3.a^2.b^4}$

b) $\sqrt[3]{7.a^{10}.b^9}$

c) $-12\sqrt{2^7.a^7}$

d) $\frac{16}{5}.\sqrt{\frac{25}{2}}$

49. Introduce en los radicales los factores que están fuera de ellos.

a) $\frac{16}{3}.\sqrt{a}$

b) $-7.11^3.\sqrt{2a}$

c) $\frac{1}{4}.b.\sqrt{3^3.b^3}$

d) $a^2.b.\sqrt[3]{3b}$

Raíz enésima como potencia fraccionaria y propiedades

Hasta ahora hemos considerado únicamente potencias de exponente natural o entero. Veremos ahora que el exponente de una potencia puede ser también un número racional.

Las potencias de exponente racional se definen mediante radicales del modo siguiente: La potencia de una base un número real a y de exponente un número racional $\frac{m}{n}$ se define como la raíz de índice n y radicando a^m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Así, observamos que los radicales pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos aprenderemos cómo se transforman mutuamente unos en otros.

> Si queremos expresar como potencias de exponente racional a:
>
> $\sqrt[3]{-12}$ lo expresamos como $(-12)^{\frac{1}{3}}$
>
> $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$ lo expresamos como $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$.
>
> Si queremos expresar en forma radical a:
>
> $(124)^{\frac{1}{4}}$ lo escribimos como $\sqrt[4]{124}$
>
> $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ lo escribimos como $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

Las potencias de exponente racional se definen de manera que las propiedades de la potencia de exponente entero continúen siendo válidas. Así, para operar con potencias de exponente racional, aplicaremos las mismas propiedades sobre potencia y radicación que describimos antes.

$$(2+a)^3.(2+a)^{\frac{1}{4}}.(2+a)^{\frac{3}{2}} = (2+a)^{3+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = (2+a)^{\frac{19}{4}}$$

$$\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}:\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{7}{6}}$$

$$(-9.a.b^2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}}.(a)^{\frac{3}{11}}.(b^2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}}.a^{\frac{3}{11}}.b^{\frac{6}{11}}$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$$

Las potencias de exponente racional y negativo pueden transformarse en potencias de exponente positivo, como en el caso de potencias de exponente entero. Para ello, tendremos en cuenta que una potencia de exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$$

Potencias de base real y exponente racional

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional, a las cuales se añade esta última, relativa a las potencias de exponente negativo.

Producto de igual base	$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
Cociente de igual base	$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
Potencia de potencia	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}$
Potencia de un producto	$(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$
Potencia fraccionara negativa	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

La transformación de raíces en potencias puede ser útil a la hora de efectuar operaciones con radicales. Estas pueden resolverse por los procedimientos ya vistos al estudiar las operaciones con radicales en potencias de exponente racional y aplicando las propiedades de estas.

Comprobemos estas dos formas de proceder con el siguiente ejemplo:

Resuelve $\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}$

- Primera resolución: Aplicamos las propiedades de las operaciones con radicales.

$$\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt[4]{5}}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}} = \sqrt{\frac{3^3}{3}}.\sqrt[4]{\frac{5^5}{5}}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^3.2^2}} =$$

$$\sqrt{3^2}.\sqrt[4]{5^4}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}} = 3^1.5^1.\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

- Segunda resolución: Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

$$\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}} = 3^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{5}{4}}.3^{-\frac{1}{2}}.2^{-\frac{3}{5}}.2^{-\frac{2}{5}}.5^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 3^{\frac{3}{2}}.3^{-\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{4}}.5^{-\frac{1}{4}}.2^{-\frac{3}{5}}.2^{-\frac{2}{5}} =$$

$$3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}.2^{-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}} = 3^1.5^1.2^{-1} = \frac{15}{2}$$

Actividades

50. Expresa como potencias de exponente racional:

a) $\sqrt{99}$

b) $\sqrt[5]{(18)^2}$

c) $\sqrt[7]{(-16)}$

d) $\left(\sqrt[3]{75}\right)^5$

51. Expresa en forma de radical

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $27^{\frac{1}{3}}$

c) $(-4)^{\frac{1}{5}}$

d) $9^{\frac{5}{6}}$

52. El número $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$. Expresa de la misma forma:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

c) $\frac{-2}{\sqrt[6]{3}}$

53. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifica en el caso de veracidad y da un contraejemplo para justificar la falsedad.

a) $5\cdot\left(\sqrt[12]{5^7}\right)^{-1} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^5}}$

b) $\left(-3+2\sqrt{7}\right)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\left(-3+2\sqrt{7}\right)^3}$

c) $(25.a.b^3)^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{(25.a.b^3)^{-\frac{5}{4}}}$

d) $(-6-a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6-a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

e) $a^{-\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

f) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a} = a^{\frac{n+m}{n\cdot m}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{n+m}}$

54. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4.\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}}.\left(-\frac{3}{4}\right)$

c) $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^3\right]^{\frac{3}{5}}:\left(1+\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Racionalización

Al dividir un número real entre otro número real pueden parecer expresiones en cuyo denominador haya alguna raíz, por ejemplo $\frac{2}{\sqrt{7}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ o $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Cuando nos encontramos con una expresión de este tipo, se acostumbra a buscar otra equivalente en cuyo denominador no aparezcan raíces; es decir, se racionaliza el denominador.

Racionalizar una expresión fraccionaria consiste en hallar otra expresión equivalente sin raíces en el denominador.

¿Por qué se racionaliza habitualmente el denominador y no el numerador? Para entenderlo recordemos que el denominador representa el número de partes en que se divide una cantidad (el numerador). Esta interpretación sólo tiene sentido si el denominador es racional. Así, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es a mitad de $\sqrt{2}$ pero ¿qué parte de la unidad representaría $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Para racionalizar multiplicamos el numerador y el denominador por una misma expresión de forma que desaparezca la raíz del denominador.

Aprendamos con ejemplos cómo hacerlo:

Queremos racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{7}$.

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Para racionalizar cuando en el denominador no hay una raíz cuadrada, como en la expresión $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ procedemos como sigue:

Eliminaremos la raíz del denominador multiplicando por un radical del mismo índice, de modo que se obtenga una potencia de exponente igual a este índice.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5}}=\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5}=\sqrt[3]{5^2}$$

Si tenemos la expresión $\frac{6}{\sqrt[3]{11^7}}$ podemos hacer algo similar.

Eliminaremos la raíz del denominador multiplicando por un radical del mismo índice, de modo que se obtenga una potencia de exponente múltiplo a este índice.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{11^7}}=\frac{6}{\sqrt[3]{11^7}}\cdot\frac{\sqrt[3]{11^2}}{\sqrt[3]{11^2}}=\frac{6.\sqrt[3]{11^2}}{\sqrt[3]{11^9}}=\frac{6.\sqrt[3]{11^2}}{11^3}$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son **expresiones conjugadas**. Así $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es la expresión conjugada de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ y, recíprocamente, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es la expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas que involucran raíces cuadradas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir, ya que $(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{a}^2-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}^2=a-b$

Queremos racionalizar una expresión que involucra dos términos en el denominador, como la siguiente: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Multiplicamos por la expresión conjugada del denominador.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

En resumen: Para racionalizar el denominador de una expresión:

- Si es de la forma $a\sqrt{b}$ multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{b}$.
- Si es de la forma $a\sqrt[n]{b^m}$ con $n>m$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.
- Si es de la forma $a\sqrt[n]{b^m}$ con $n<m$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{k.n-m}}$, con $k\in\mathbb{N}$donde $k.n$ es el primer múltiplo de n tal que $k.n>m$
- Si es de la forma $a\pm\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada correspondiente.

Actividades

55. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

b) $\frac{-17}{2\sqrt[3]{17}}$

c) $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{15}}$

e) $\frac{9}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$

f) $\frac{-2\sqrt{5}}{-2+\sqrt{6}}$

g) $\frac{4}{\sqrt[3]{5^8}}$

56. Efectúa las siguientes sumas de expresiones fraccionarias. Previamente debes racionalizar cada uno de los sumandos.

a) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{3}{1+\sqrt{2}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{3\sqrt{2}}-2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}$

d) $5\sqrt{11}-3\sqrt{17}-4.\frac{11}{\sqrt{11}}-9\sqrt{11}+8\sqrt{17}$

e) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

f) $\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}$

g) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2$

h) $\left(7-\sqrt{21}\right)\left(7+\sqrt{21}\right)$

Notación de intervalos

El orden de los números reales nos permite hablar del conjunto de los números reales comprendidos entre dos números determinados.

Tomemos dos números reales, tales que el primero sea menor que el segundo $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, existe una infinidad de números reales en este intervalo, "x" tales que $a < x < b$, esos números forman subconjuntos de los reales llamados intervalos.

Según si se incluyen o no los extremos "a" y "b", los intervalos se llaman: cerrado, abierto o semiabiertos.

El intervalo cerrado incluye a los extremos y a los reales entre los extremos, su notación por comprensión es:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

El intervalo abierto incluye a los reales entre los extremos pero no a ellos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

Los intervalos semiabiertos incluyen a un extremo y a los reales entre los extremos:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{\, x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{\, x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$$

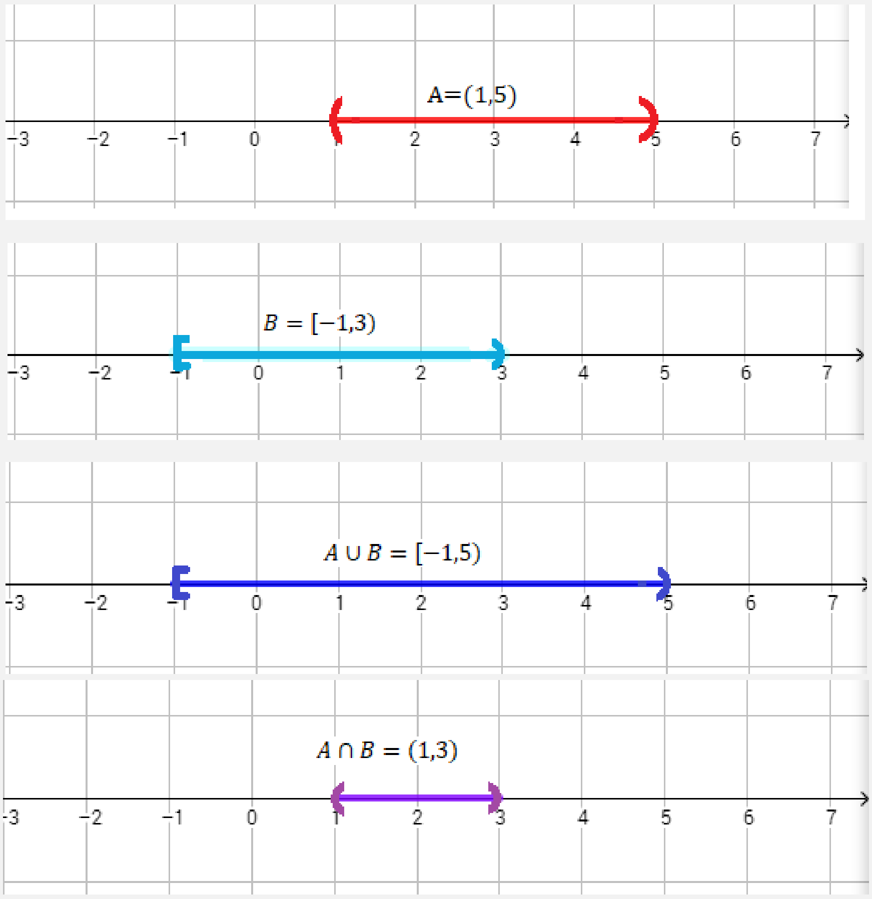
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$$

Observemos que si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo •; si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia ○. También se usa la notación de corchetes en lugar del círculo • para los casos en que se incluye un extremo y paréntesis en lugar de la circunferencia ○ para indicar que no se incluye el extremo.

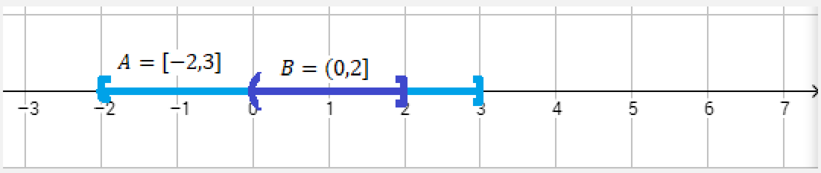
Los intervalos son subconjuntos de $\mathbb{R}$, por tanto, podemos efectuar las operaciones de unión e intersección sobre ellos.

Si $A = (1,5)$ *y* $B = [-1,3)$, *tenemos que* $A \cup B = [-1,5)$ *y* $A \cap B = (1,3)$.



También podemos tener un intervalo incluido en otro.

Si $A = [-2,3]$ *y* $B = (0,2]$, *tenemos que* $B \subset A$



Actividades

57. Escribe un intervalo abierto cuyo punto central sea -3 y cuyos extremos se hallen a una distancia de 2 unidades de dicho punto.

58. Representa los siguientes intervalos y determínalos por comprensión:

a) $[1,2]$

b) $(-1,0)$

c) $[2,3)$

d) $(-2,3]$

e) $[4,\infty)$

59. Representa los intervalos $A=[-1,3)$ y $B=(2,6)$. Colorea el trozo de la recta común a ambos intervalos. ¿Qué intervalo representa el trozo de recta coloreado? ¿Qué operación se realiza entre los conjuntos?

60. Dados los intervalos $A=(-4,6)$, $B=[1,8)$ y$C=(-\infty,4]$.

Determina:

a) $A\cup B$

b) $B\cap C$

c) $A\cap C$

d) $(A\cup C)\cap B$

61. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a) $\frac{1}{2}\in[-1,1]$

b) $-2\notin[-4,-1]$

c) $\sqrt{14}\in[3,4]$

d) $\left[-1,\sqrt{5}\right)\subset(-\pi,\pi]$

Actividades de repaso del Capítulo 1

1. Calcula

   a) $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[6]{4}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{0{,}25}$

   b) $\sqrt[3]{9} \cdot \left(0,\widehat{39} \cdot \frac{11}{11+2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{9}$

   c) $\sqrt[3]{0{,}027} \cdot (0{,}81)^{-1/2} + \frac{1}{2+\sqrt{(-1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}16}{\frac{1}{25}}}$

   d) $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$

   e) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

   f) $\dfrac{1{,}94-\sqrt[3]{(-1)^5}-\left(\frac{50}{27}\right)^{-1}}{\frac{\sqrt{24}\sqrt{2}}{\sqrt{75}}}$

2. Aplicando propiedades de la potencia muestra que

   a) $\sqrt{50.5^{2n+6}+20.5^{2n+7}+3.5^{2n+8}} - \left(\sqrt[4]{3}.5\right)^4.5^n = 0$

   b) $\left(90 \cdot 3^{2n} + 12 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+2}\right) \cdot \left(\frac{3^{-(n+1)}}{4}\right)^2 - 1 = 0$

   c) $\sqrt[3]{\left(7^{3n+9} + 42 \cdot 7^{3n+8} + 49 \cdot 7^{3n+7}\right)} \cdot \left(\frac{7^6}{2 \cdot 7^{n+9}}\right) + 1 = 2$

3. Resuelve explicitando las propiedades utilizadas.

   a) $\frac{\sqrt{44}+\sqrt{11}}{\sqrt{44}-\sqrt{11}} + \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{1{,}0\hat{2}-\frac{26}{45}}}{\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}}}$

   b) $\dfrac{\left(1{,}9\hat{4}-\sqrt[3]{(-1)^7}-\left(\frac{18}{23}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}\sqrt{75}}} + \sqrt{2,\widehat{12}+\frac{62}{33}}$

   c) $\frac{\sqrt{10}}{\left(\sqrt{11}-1\right)} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}} + \left[\left(1+\sqrt{20}\right)^2 - \sqrt{80}\right] \cdot 0,\hat{3}$

   d) $\sqrt{3.6^{2n+8}+72.6^{2n+6}+24.6^{2n+7}} - 6^n.\left(\sqrt[4]{3}.6\right)^4$

4. Modeliza matemáticamente y resuelve los siguientes problemas:

   a) Un depósito de base cuadrada está lleno de cereal. El lado de la base mide 5m. y la altura es los 8/5 del lado de la base. Un día se retira el 15% del grano y a la semana siguiente se retira otro 10% de grano restante. ¿Cuántos m3 de grano quedaron? ¿Qué porcentaje del depósito quedó vacío?

   b) Calcula el volumen de goma de una pelota de radio interior 5 cm con un espesor de 5 milímetros.

c) ¿En cuánto aumenta el área de un rectángulo cuyos lados miden 12 m. y 4 m. si se aumentan ambos lados en un 25%?

d) Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 8. ¿Cómo se expresa esa relación matemáticamente?

e) Al comenzar el año Luis tenía 2940 pesos ahorrados. En enero se fue de vacaciones y gastó la tercera parte. En febrero 1/5 de lo que le quedaba lo utilizó para comprarse ropa, y en marzo gastó los 3/4 remanentes en libros para la facultad. ¿Cuánto dinero le sobró a Luis?

f) Si la base de un rectángulo disminuye un 60% y la altura aumenta en un 150%, ¿varía la superficie?

Anexo del Capítulo 1

Relación de orden

Para representar que un número es mayor que otro usaremos el símbolo **mayor que**, que se representa por “>”. Se ubica el número mayor en el lado abierto del símbolo $>$ y el número menor al otro lado.

Tomemos como ejemplo el 3 y el 5. Sabemos que el 5 representa una mayor cantidad de elementos que el 3. Debemos escribir por lo tanto $5 > 3$. Esta expresión debe ser leída como "cinco es mayor que tres".

También usamos el símbolo $<$, que es leído como **menor que**. Podemos entonces representar la relación $5 > 3$ así: $3 < 5$, que debe ser leída como "tres es menor que cinco".

$a > b$	$b < a$
a es mayor que b	b es menor que a

Para acordarnos de la dirección en que van, recordemos que $MAYOR > menor$ o $menor < MAYOR$:

Por la misma razón, el signo $=$ define que ambas cantidades son iguales, no hay una mayor que otra. Por ejemplo, $3 + 5 = 8$.

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que nos ayudan a determinar si un número es divisible por otro. Daremos a continuación los criterios más útiles a la hora de tener que simplificar una fracción.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2, si termina en cero o cifra par.

> 4,18, 2384, 87308630 son múltiplos de 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3, si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

> 564: como 5+6+4=15 y 15 es múltiplo de 3, tenemos que 546 es múltiplo de 3.

> 2040: como 2+0+4+0=6 y 6 es múltiplo de 3, tenemos que 2040 es múltiplo de 3.

> 623: no es múltiplo de 3, ya que 6+2+3=11 que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5, si termina en cero o cinco.

45, 515, 7525, 230 son múltiplos de 5.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11

121: es múltiplo de 11 ya que (1+1)−2=0.

4224: es múltiplo de 11 dado que (4+2)−(2+4)=0.

1925: es múltiplo de 11 porque (1+2)-(9+5)=-11, que es múltiplo de 11.

Números irracionales

¿Por qué $\sqrt{2}$ es irracional?

Recordemos que n es par si y solo si n^2 es par y n es impar si y solo si n^2 es impar.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces se puede expresar

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$ y sin factores en común (es decir, es una fracción irreducible).

Entonces tenemos que $\sqrt{2}.n = m$, y si elevamos ambos miembros al cuadrado tenemos que

$$2.n^2 = m^2$$

Tenemos entonces que m^2 es par, y por ende m es par, por lo que podemos expresar $m = 2.c$ con $c \in \mathbb{Z}$.

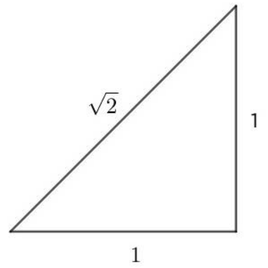
Reemplazando, tenemos que $2.n^2 = (2.c)^2 = 4c^2$ de donde $n^2 = 2c^2$. Luego n^2 es par, y entonces n también es par.

Llegamos entonces a un absurdo, ya que tanto n como m resultaron pares, pero habíamos supuesto que no tenían factores en común. Entonces $\sqrt{2}$ no puede ser racional.

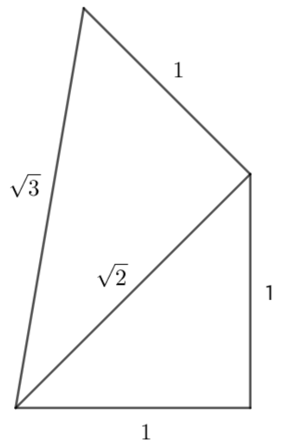
¿Se puede graficar un segmento con longitud irracional?

Como hemos visto, los números irracionales tienen infinitos decimales no periódicos y por lo tanto, no es posible graficar con precisión segmentos de esa longitud usando una regla. Sin embargo, existen técnicas que nos permiten graficar algunos segmentos de longitud irracional, como aquellos que provienen de la raíz cuadrada de un número natural.

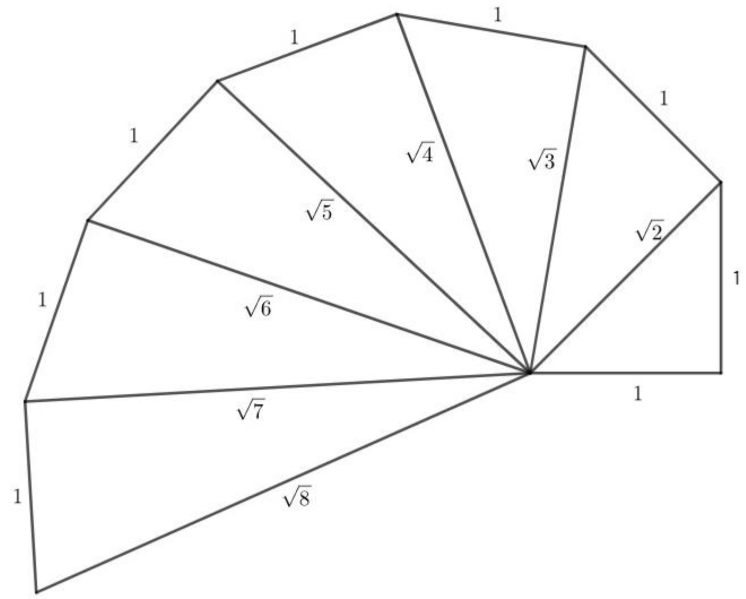
Para esto, observemos que por el Teorema de Pitágoras, si tenemos un triángulo rectángulo en el que sus catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$, como se ve en el dibujo:



Si ahora construimos otro triángulo rectángulo utilizando el lado que mide $\sqrt{2}$ como uno de los catetos y un lado de longitud 1 como el otro cateto, podemos aplicar nuevamente el Teorema de Pitágoras para ver que la longitud de la hipotenusa del segundo triángulo es $\sqrt{3}$:

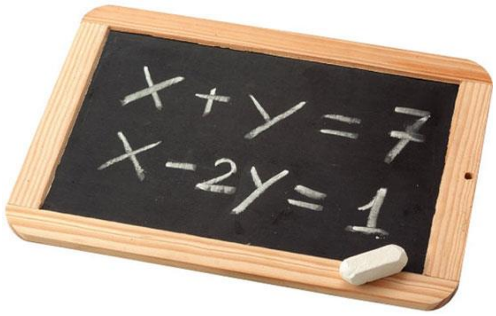


Si continuamos el procedimiento, podemos dibujar triángulos cuya hipotenusa mida $\sqrt{n}$, para cualquier número natural $n > 0$:



Capítulo 2: Ecuaciones y polinomios

La mayoría de los problemas se traducen en problemas matemáticos donde sus condiciones se expresan en forma de una o varias ecuaciones. Resolver problemas en general es una tarea que todo ingeniero debe realizar. Y encontrar solución a un problema es un reto que algunas veces lleva horas o incluso días e involucra, muchas veces, a todo un equipo de personas.



Se llama **identidad** a una igualdad algebraica que se satisface para cualquier valor que se le atribuya a las incógnitas o variables que en ella figuren. Por ejemplo $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ es una identidad porque se mantiene la igualdad para cualquier valor de las letras.

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas **miembros**, separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes y el término desconocido o **incógnita** se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: “x”, “y” o “z”, aunque puede utilizarse cualquiera otra letra.

La expresión escrita a la izquierda del signo igual en una ecuación recibe el nombre de **primer miembro**, mientras que la expresión que está a la derecha del signo igual se llama **segundo miembro**.

$$\underbrace{2x+3}_{Primer\ miembro} = \underbrace{5x^2+8}_{Segundo\ miembro}$$

En una ecuación puede haber más de una incógnita, es decir, más de un valor desconocido.

La igualdad planteada por una ecuación será verdadera o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas.

Si en lugar de una igualdad se trata de una desigualdad entre dos expresiones matemáticas, se denominará **inecuación**.

Resolver una ecuación es calcular la o las soluciones de la misma. Las soluciones de la ecuación son los valores numéricos que deben tomar las incógnitas para que la igualdad sea cierta. Es decir, al sustituir estos valores por las letras en la ecuación y operar, obtenemos una igualdad.

Comprobar que $x = -5$ es solución de la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$

Si reemplazamos por $x = -5$ en la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$ tenemos que

$$2.(-5) - 3 = 3.(-5) + 2$$
$$-10 - 3 = -15 + 2$$
$$-13 = -13$$

En este caso diremos que el conjunto solución es $S = \{-5\}$.

Siempre después de resolver una ecuación conviene comprobar que la solución es válida, es decir que si reemplazamos en la ecuación obtenemos una identidad. Este paso se llama **verificación.**

Actividades

1. Verifica si los siguientes valores de x son soluciones de la ecuación correspondiente. Justifica la respuesta.

   a) $x = 5,\ x = 3\ \text{ y }\ x = -7$ $\qquad x^2 + 2x - 35 = 0$

   b) $x = -2,\ x = 3\ \text{ y }\ x = 1$ $\qquad x^3 + 2x^2 = 2 + x$

Leyes de monotonía

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación tratamos de encontrar una ecuación equivalente que sea más simple, donde la variable se encuentre solo en un lado de la igualdad.

Para resolver una ecuación aplicamos propiedades, entre ellas:

- Propiedad de monotonía para la suma: $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$.
  Es decir, si sumamos o restamos una misma cantidad en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.
- Propiedad de monotonía para el producto: $A = B \Leftrightarrow k.A = k.B,\ \ k \neq 0$.
  Es decir, si multiplicamos o dividimos por una misma cantidad no nula en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.
- Propiedad cancelativa: si $c \neq 0$, y $a.c = b.c$, entonces $a = b$.

Al aplicar estas propiedades a una ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

Resuelve la ecuación $4x - 5 = 27$ *utilizando las propiedades.*

Hallaremos el valor de la incógnita utilizando las propiedades ya estudiadas

$4x - 5 = 27$	Ecuación original
$4x - 5 + 5 = 27 + 5$	Monotonía para la suma
$4x = 32$	Asociativa
$4x.\frac{1}{4} = 32.\frac{1}{4}$	Monotonía para el producto
$x = 8$	Ecuación más simple

De la última ecuación deducimos que 8 es la solución de la ecuación original. Comprobemos que esto es verdad: $4.8 - 5 = 32 - 5 = 27$.
Entonces el conjunto solución es $S = \{8\}$

Consecuencias de las propiedades de monotonía

- Todo número o expresión que figura sumando en un miembro de una ecuación puede pasar al otro miembro restando, y recíprocamente, si está restando puede pasar sumando al otro miembro.
- Si un número está multiplicando <u>a todo</u> un miembro de una ecuación, puede pasar al otro miembro como divisor, y recíprocamente, si está dividiendo <u>a todo</u> un miembro puede pasar multiplicando <u>a todo</u> el otro.
- Se puede cambiar el signo a todos los términos de una ecuación, que sería lo mismo que multiplicar a ambos miembros por -1.
- Para suprimir los denominadores de una ecuación, basta con multiplicar a ambos miembros por el producto de los denominadores, o bien por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales y cuadráticas de una sola incógnita.

Ecuación lineal

Una **ecuación de primer grado o lineal** es equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Para hallar las soluciones de una ecuación lineal se debe operar con ecuaciones equivalentes mediante el uso de propiedades hasta obtener una ecuación del tipo $x = c$.

Si $ax + b = 0$, tenemos que

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Entonces $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Se pide que $a \neq 0$, porque en caso contrario no sería una ecuación de primer grado o lineal. Si admitimos la posibilidad de que a sea 0, entonces obtenemos la ecuación $0x = -b$, de donde podemos tener dos casos

- Si $b = 0$, la ecuación es válida para cualquier valor real que tome x, por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones y se denota $S = \mathbb{R}$.
- Si $b \neq 0$, no existe ningún valor real que cumple la igualdad, por lo que la ecuación no tiene solución y se denota $S = \emptyset$.

$$4x + 18 = 0 \to 4x = -18 \to x = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

Por lo tanto $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$.

$$x + 4 - 3x = 2 - 2x + 2 \to x - 3x + 2x = 2 + 2 - 4$$
$$\to 0x = 0$$

Por lo tanto $S = \mathbb{R}$.

$$6x + 4 = 4x - 2 + 2x \to 6x - 4x - 2x = -2 - 4$$
$$\to 0x = -6$$

Por lo tanto $S = \emptyset$.

Actividades

2. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales explicitando el conjunto solución

   a) $2x - 3 = 6 + x$

   b) $2(2x - 3) = 6 + x$

   c) $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$

   d) $3x + (2x - 3) = 7(x - 2) - x$

   e) $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$

   f) $\frac{3(1+2x)+5}{2} = 2(x + 2) + x$

g) $2-\left[-2.(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

h) $\frac{x+4}{2}=\frac{x}{11}+11$

i) $\frac{x-1}{6}-\frac{3x+2}{3}+1=\frac{x}{12}+\frac{1}{6}$

j) $\frac{2x+12}{3}=\frac{10x-30}{15}+1$

k) $-3(2x-5)-5x=3x$

3. Determina, si es posible, los valores reales de a y b para que la ecuación en la indeterminada x:

$$(x+2)^2-(b-2)^2=x(x-a)-(b^2-4b+8)$$

a) Tenga solución única.
b) No tenga solución.

Problemas de primer grado con una incógnita

Ahora que ya estudiamos la resolución de las ecuaciones lineales, veamos la aplicación de dichas ecuaciones para resolver ciertos problemas.

Al resolver un problema tenemos que considerar los siguientes pasos:

1. Interpretar el enunciado para modelizar la situación.
2. Definir la variable y plantear la ecuación.
3. Resolver la ecuación planteada.
4. Discutir la solución hallada.
5. Comprobar la solución obtenida.
6. Dar la respuesta al problema.

Interpretar el enunciado

Es muy importante leer cuidadosamente el enunciado, graficar la situación de ser posible, identificar los datos dados y detectar la o las incógnitas. Si el problema incluye datos con unidades de medidas, éstas deben estar unificadas (si hubiera distintas unidades, hay que elegir una unidad y convertir las demás a esa unidad).

Definir la variable y plantear la ecuación

Para plantear la ecuación que modelice el problema a resolver no hay reglas definidas, aunque es aconsejable leer atentamente el enunciado, elegir y definir la variable de manera correcta y traducir al lenguaje algebraico (matemático) cada una de las partes del enunciado dado.

Discutir la solución obtenida

A veces la solución de un problema, a pesar de ser matemáticamente correcta, no lo es en la práctica o contexto del problema a resolver, porque la naturaleza de las cantidades tratadas en el problema no permite la aplicación de las soluciones halladas. Por lo tanto es siempre conveniente interpretar el resultado una vez hallado, es decir, considerar si la solución matemática hallada es o no posible.

Por ejemplo, si tenemos un problema en el que se busca calcular la cantidad de personas que asistieron a una fiesta, no podemos tener una cantidad fraccionaria ni negativa. Si buscamos calcular la edad de Pedro, la misma podría ser fraccionaria, pero no negativa. Las longitudes pueden ser números naturales, fraccionarios o irracionales, pero siempre positivos.

Comprobar la solución obtenida

Debemos verificar que la solución hallada cumple todas las condiciones del enunciado dado.

Dar la respuesta al problema

Siempre debemos responder de manera completa a la pregunta o planteo del problema sin olvidarnos las unidades de medida u otros detalles según sea el caso.

Compré un martillo y un puñado de clavos, pagando un total de \$75, habiendo pagado cuatro veces más por el martillo que por los clavos ¿Cuánto pagué por cada objeto?

Una vez leído el enunciado, se interpreta que la incógnita del problema es el valor del martillo y del puñado de clavos. Ambos valores están relacionados entre sí y por lo tanto, si llamamos x al valor en \$ de los clavos, entonces el martillo valdrá $4x$ *. La suma del valor de ambos objetos estará dada por la ecuación* $4x + x = 75$ *(notar que sumamos valores en \$ e igualamos a un valor en \$).*
Al resolver la ecuación planteada obtenemos:

$$4x + x = 75$$
$$5x = 75$$
$$x = 15$$

Una vez hallado el valor de x sabemos que el puñado de clavos vale \$15 y entonces el martillo que vale 4 veces el valor de los clavos, cuesta 4.15=60, o sea \$60.
Si verificamos los valores hallados en el enunciado dado, vemos que la suma del valor del martillo y de los clavos será: $60 + 15 = 75$ *y que el martillo vale 4 veces el valor de los clavos. Concluimos que se cumplen las condiciones dadas en el enunciado.*
Respuesta al problema: El valor del martillo fue de \$60 y del puñado de clavos fue de \$15.

Teorema del factor cero: Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

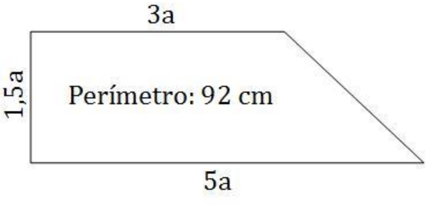
$$p.q = 0 \leftrightarrow p = 0 \text{ o } q = 0.$$

Es decir la única manera que un producto valga 0 es que alguno de los factores sea igual a 0. Y también que si un factor es 0, el producto también es 0.

Este Teorema será muy útil cuando podamos igualar a cero el producto de dos factores y entonces se puedan hallar, por ejemplo, soluciones de ecuaciones al igualar cada uno de los factores a cero.

Actividades

4. Escribe la expresión algebraica correspondiente a los siguientes enunciados y resuelve las ecuaciones resultantes
   a) El doble del número x disminuido en 3 es igual al número x más 15.
   b) El número x excede en 4 unidades a 21.
   c) La suma del número x y su anterior es 17.
   d) El doble del número x es igual a la quinta parte de x, más 18.
5. Halla el número cuyo triple más su cuádruple suman 77.
6. Un número se multiplica por 9 y el resultado es el número aumentado en 112. ¿Cuál es el número inicial?
7. Las longitudes de los lados de un triángulo escaleno son números impares consecutivos. El perímetro es 69 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?
8. La edad de Alina es 1 año menor a la edad de María y la edad de Elías es el doble de la de María. Si la suma de las edades de los tres es 19, ¿cuántos años tiene cada uno?
9. Alejandro viajó en taxi. Si la bajada de bandera sale \$18 y por cada 100 metros recorridos se aumentan \$2, ¿Cuántos kilómetros recorrió si pagó \$128?
10. Eugenio tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Cuántos años tiene?
11. Construye distintas ecuaciones lineales que cumplan las siguientes condiciones
    a) $x = -3$ es solución.
    b) $x = \frac{5}{2}$ es solución.
    c) Tiene infinitas soluciones.
    d) No tiene solución.
12. Plantea la ecuación y halla las dimensiones de la siguiente figura



Ecuaciones cuadráticas

Se llama **ecuación cuadrática** a aquella ecuación que es equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , con } a \neq 0$$

Cada uno de los términos de la ecuación recibe un nombre en relación al exponente al que está elevada la variable, y estos son:

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{Término \\ cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\substack{Término \\ lineal}} + \underbrace{c}_{\substack{Término \\ independiente}} = 0$$

Sin la condición de $a \neq 0$, sería una ecuación lineal.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones veremos primero algunos casos sencillos.

- ***Caso c*** $= \mathbf{0}$: Tenemos entonces $ax^2 + bx = 0$, de donde se puede sacar x como factor común, quedando $x(ax + b) = 0$. Ya sabemos que si un producto es igual a cero, es porque alguno de los factores debe ser cero, por lo que sabemos que $x = 0$ o $ax + b = 0$, es decir, $x = -\frac{b}{a}$. Entonces tenemos las dos soluciones de la cuadrática $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Resuelve la ecuación cuadrática $3x^2 + 9x = 0$.

Si $3x^2 + 9x = 0$, *entonces tenemos* $x.(3x + 9) = 0$, *de donde* $x = 0$ *o* $3x + 9 = 0$, *es decir* $x = -\frac{9}{3} = -3$. *Por lo tanto* $S = \{0, -3\}$.

- ***Caso b*** $= \mathbf{0}$: Tenemos entonces $ax^2 + c = 0$, y si despejamos x^2 nos queda $x^2 = -\frac{c}{a}$.

  En el caso que $-\frac{c}{a} > 0$, (eso sucede si el $\text{signo}(c) \neq \text{signo}(a)$) tenemos dos soluciones $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ó $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Es decir $S = \left\{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

  En el caso $-\frac{c}{a} < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución (un número al cuadrado nunca puede ser negativo).

Resuelve las ecuaciones cuadráticas $2x^2 - 4 = 0$ *y* $2x^2 + 4 = 0$.

Si $2x^2 - 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = \frac{4}{2} = 2$, *por lo que* $x = \sqrt{2}$ *y* $x = -\sqrt{2}$ *son soluciones de la ecuación. Por lo tanto* $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Si $2x^2 + 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = -\frac{4}{2} = -2$, *por lo que la ecuación no tiene solución.* $S = \emptyset$.

- ***Caso b*** $= \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$: Queda $ax^2 = 0$, donde la única solución es $x = 0$. Es decir, $S = \{0\}$.

Resuelve la ecuación cuadrática $9x^2 = 0$.

Si $9x^2 = 0$, *tenemos que* $x = 0$. *Por lo tanto* $S = \{0\}$.

- ***Caso*** $\boldsymbol{a(x-\alpha)^2+\beta=0}$***:*** Si la ecuación cuadrática está expresada de la forma $a(x-\alpha)^2+\beta=0$, podemos despejar y obtener que $(x-\alpha)^2 = -\beta/a$ y nuevamente la existencia o no de soluciones depende del signo de $-\beta/a$.
  - Si $-\frac{\beta}{a} > 0$, las dos soluciones son $x = \sqrt{-\frac{\beta}{a}} + \alpha$ y $x = -\sqrt{-\frac{\beta}{a}} + \alpha$
  - Si $-\frac{\beta}{a} < 0$, no hay solución real.

Resuelve las siguientes ecuaciones

$$3(x-1)^2 - 27 = 0$$

$$3(x-1)^2 + 27 = 0$$

Si $3(x-1)^2 - 27 = 0$, *tenemos que* $(x-1)^2 = \frac{27}{3} = 9$ *de donde* $x - 1 = 3$ *o* $x - 1 = -3$, *es decir* $x = 4$ *o* $x = -2$. *Por lo tanto* $S = \{4, -2\}$.

Si $3(x-1)^2 + 27 = 0$, *tenemos que* $(x-1)^2 = -\frac{27}{3} = -9$ *entonces la ecuación no tiene solución en los reales ya que no existe ningún número real que al cuadrado tenga un resultado negativo.*

Entonces, nos gustaría poder expresar la ecuación $ax^2 + bx + c$ como $a(x-\alpha)^2 + \beta$. Veremos a continuación un método para lograrlo conocido como completar cuadrados.

Recordemos primero que $(x+A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$ (Cuadrado de un binomio).

Analicemos qué ocurre en los siguientes ejemplos

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

Si comparamos con $x^2 + 2Ax + A^2$, para que los dos segundo términos sean iguales necesitamos que $2Ax = 6x$, por lo que $2A = 6$ o $A = 3$.
Lo que haremos a continuación, será sumar y restar un mismo número, así la expresión no cambia. ¿Qué número sumaremos? A^2, para que podamos asociar a los tres primeros términos y formar el cuadrado de un binomio.
Entonces $x^2 + 6x - 1 = \underbrace{x^2 + 2.3.x + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2 - 1 = (x+3)^2 - 10$.
En este caso $\alpha = -3$ y $\beta = -10$.

$$2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Lo que haremos primero es sacar al 2 como factor común, para que el primer término se parezca al del cuadrado del binomio. Nos queda entonces $2x^2 - 5x + 6 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$. Ahora comparamos $2Ax$ con $-\frac{5}{2}x$ de donde deducimos que $A = -\frac{5}{4}$. Falta entonces sumar y restar $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$.

$$\begin{aligned} 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) &= 2\left(\underbrace{x^2 + 2.\left(-\frac{5}{4}\right)x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}_{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2} - \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 3\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{13}{4}\right) \\ &= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{13}{2} \end{aligned}$$

En este caso $\alpha = \frac{5}{4}$ y $\beta = -\frac{13}{2}$.

El número que estamos sumando y restando en ambos casos, una vez sacado factor común el coeficiente del término cuadrático, es el coeficiente del término lineal, dividido por 2, y luego elevado al cuadrado.

En general nos quedaría

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

En resumen, primero debemos sacar de factor común el coeficiente que acompaña a la x^2 (en la expresión general sería a), y luego sumar y restar el segundo coeficiente sobre 2, al cuadrado, luego asociar los tres primeros términos como el cuadrado de un binomio y por último distribuir el coeficiente del término cuadrático.

El método de completar cuadrados no solo nos servirá para encontrar las soluciones de las cuadráticas, sino que los utilizaremos más adelante para llevar a las expresiones canónicas de las cónicas, y también lo utilizaremos en Matemática A y B.

Si queremos hallar las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, podemos completar cuadrados como hicimos antes, lo que nos queda

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es decir, tenemos las soluciones

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Está fórmula es conocida como la **fórmula de *Bhaskara*** [3] para hallar soluciones de la ecuación cuadrática.

Fórmula de Bhaskara: Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ son:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Recordemos que el símbolo $\pm$ es solo una notación. Sirve para indicar en una única expresión que hay dos valores posibles: uno con el signo $+$ y otro con el signo $-$.

Esta ecuación admite tres posibilidades para las soluciones: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (por lo que la solución es solución doble), o sin solución en los reales, dependiendo del valor que tome b^2-4ac. A esta expresión la llamaremos **discriminante** y la denotaremos con la letra griega Δ (se lee delta).

Las tres posibilidades son que Δ sea positivo, cero o negativo:

- Si $\Delta>0$, tenemos dos raíces reales distintas $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$, tenemos dos raíces coincidentes reales $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, no tenemos raíces reales, es decir, la ecuación cuadrática no tiene solución.

Encuentra las soluciones, si existen, de la ecuación $\boldsymbol{x^2-x-6=0}$

En este caso tenemos que $a=1, b=-1$ *y* $c=-6$. *Entonces* $\Delta=(-1)^2-4.1.(-6)=1+24=25>0$, *por lo que la ecuación tendrá 2 soluciones reales distintas. Las mismas son*

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4.1.(-6)}}{2.1}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$

[3] El primer registro que se tiene de esta fórmula es el tratado Lilavati, publicado en 1150 por el matemático y astrónomo indio Bhaskara (1114-1185).

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$

Por los tanto $S = \{3, -2\}$.

Encuentra las soluciones, si existen, de la ecuación $\mathbf{3x^2 + 12x + 12 = 0}$

En este caso $a = 3, b = 12$ *y* $c = 12$. *Entonces* $\Delta = (12)^2 - 4.3.(12) = 144 - 144 = 0$, *por lo que la ecuación solo tendrá una solución real doble. La misma es*

$$x = \frac{-12 + \sqrt{(12)^2 - 4.3.(12)}}{2.3} = \frac{-12+0}{6} = -2$$

Por lo tanto $S = \{-2\}$.

Encuentra las soluciones, si existen, de la ecuación $\mathbf{4x^2 - 2x + 6 = 0}$

En este caso $a = 4, b = -2$ *y* $c = 6$. *Entonces* $\Delta = (-2)^2 - 4.4.(6) = 4 - 96 = -92 < 0$, *por lo que la ecuación no tiene solución real.*
Por lo tanto $S = \emptyset$.

Actividades

13. Completando cuadrados, encuentra si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

c) $-x^2 = -4x - 21$ d) $2x^2 - x + 3 = -1$

e) $\frac{x^2}{4} + x = 8$ f) $4x^2 + 10x + \frac{9}{4} = \frac{64}{9} + 4x$

g) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$

14. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y, sin resolver la ecuación, determina la existencia de soluciones reales. Si existen, halle los valores de las soluciones utilizando la fórmula de Bhaskara.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $2x^2 - x + 3 = -1$ c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

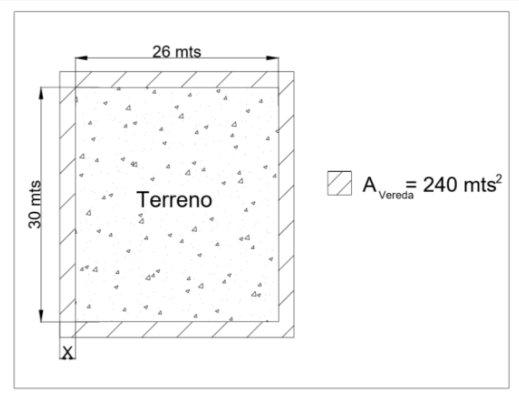
d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$ e) $-x^2 = -4x - 21$

15. Encuentra el valor de k para que la ecuación $x^2 - \frac{(k+1)}{3}x + \frac{k}{9} = 0$ admita una única solución real. Encuentra dicha solución.

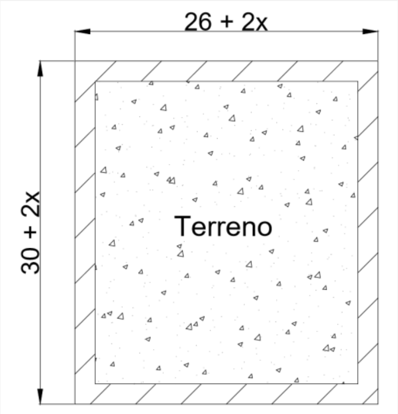
16. Encuentra él o los valores de k para que la ecuación $(k+3)x^2 - kx + 1 = 0$ tenga solución única. Para cada valor de k hallado, encuentra la única solución de la ecuación.

Ejemplo de aplicación en un caso real

Un terreno rectangular de 26 mts de ancho por 30 mts de largo se debe rodear de una vereda de ancho uniforme. Si el área total de la vereda es de 240 mts² ¿Cuál es el ancho de la vereda?



Observando la figura y los datos del problema debemos definir que llamaremos x al ancho en mts de la vereda y x es nuestra incógnita.
Sabemos que el terreno rectangular tiene superficie: $26.30 = 780mts^2$.
Ya que la vereda rodea al terreno, observemos que el largo y ancho de la vereda será de $30 + 2x$ *y de* $26 + 2x$ *respectivamente.*



Si planteamos la igualdad entre la superficie total (vereda y terreno) menos la superficie del terreno nos dará la superficie de la vereda que es de 240 mts².
Entonces en términos de los datos que nos da el problema tenemos

$$(30 + 2x).(26 + 2x) - (26.30) = 240$$

$$780 + 60x. +52x + 4x^2 - (780) = 240$$

Agrupando los términos resulta quedar una ecuación cuadrática

$$4x^2 + 112x - 240 = 0$$

De donde podemos observar que $a = 4$, *que* $b = 112$ *y que* $c = -240$.
Como $\Delta = (112)^2 - 4.4.(-240) = 16384 > 0$ *sabemos que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.*
Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida y hallamos esas dos soluciones que son:

$$x_1 = -30 \; y \; x_2 = 2.$$

Como estamos en un contexto, según el problema, de unidades de medida de un terreno, aunque x_1 *sea una solución de la ecuación cuadrática, no puede ser solución del problema por ser negativa. Por lo tanto la medida del ancho de la vereda será de 2 mts.*
Si queremos verificar la solución hallada podemos calcular la superficie de la vereda, resultando: $34.30 - 780 = 1020 - 780 = 240$.

Actividades

17. Un triángulo equilátero tiene una altura de 20 cm. ¿Cuál es su perímetro?
18. Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura h (con respecto del suelo) en cada instante de tiempo $t$está dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 15t + 50$. Encuentra el instante de tiempo en la que la pelota toca el suelo.
19. En un triángulo equilátero ABC el lado $AB = x^2 + x$ y el lado $BC = 5x + 5$. Calcula el perímetro y el área del triángulo.
20. Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que la suma de los cuadrados de los dos primeros supera en 84 al cuadrado del tercero. Determina cuales son esos números.
21. Dos bicicletas parten simultáneamente de un mismo punto, una hacia el sur y otra hacia el este. Al cabo de unos instantes, la distancia entre ellas es de 100 metros. ¿Cuánto recorrió cada bicicleta si se sabe que la que se dirige al sur hizo 20 metros más que la otra?
22. Determina el número entero del cual se sabe que si sumamos el tercio de su siguiente más el cuadrado de su anterior da como resultado dos unidades menos que su cuádruple.
23. La diferencia entre el cuadrado de la edad de Matías hace 5 años, y 10 veces su edad actual es 94, ¿Cuál era su edad hace 5 años?
24. Determinar un número entero cuyo producto por el opuesto de su consecutivo es igual al doble de su cuadrado.
25. Determina el número natural tal que el producto de él con su anterior sea igual a su doble, más 4.

Aplicación especial de ecuaciones cuadráticas

Ciertas ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una sustitución adecuada.

En particular, una **ecuación bicuadrática** es una ecuación que se puede expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ donde a, b y c son tres números reales y $a \neq 0$.

Para resolver una ecuación bicuadrática hacemos el cambio de variable $x^2 = u$, por lo tanto, $x^4 = u^2$.

La ecuación expresada en función de u es $au^2 + bu + c = 0$.

Una vez resuelta esta ecuación sustituiremos sus soluciones en $x^2 = u$, y obtenemos así las soluciones de la ecuación en x.

Utilizando un cambio adecuado resuelve la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Haciendo el cambio $x^2 = u$ obtenemos la ecuación $u^2 - 13u + 36 = 0$.
Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 4$ y $u_2 = 9$.
Si $u_1 = 4$, entonces $x^2 = 4$, de donde $x_1 = 2$ o $x_2 = -2$.
Si $u_2 = 9$, entonces $x^2 = 9$, de donde $x_3 = 3$ o $x_4 = -3$.

Concluimos entonces que el conjunto solución de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es
$S = \{2, -2, 3, -3\}$.

En el caso de que algún valor de u sea negativo, no se obtendrán soluciones de x de ese valor de u. Por ejemplo, si $u_1 = 3$ y $u_2 = -4$, tenemos que $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Veamos ahora otro ejemplo de una ecuación que no es bicuadrática pero en la que se podrá aplicar una sustitución conveniente. A estas ecuaciones la llamaremos **ecuaciones del tipo bicuadráticas.**

Utilizando un cambio adecuado resuelve la ecuación $(x-2)^6 - (x-2)^3 - 2 = 0$.

Proponiendo el cambio $u = (x-2)^3$, tenemos que $u^2 = (x-2)^6$, de donde nuestra ecuación queda expresada como $u^2 - u - 2 = 0$.
Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 2$ y $u_2 = -1$.
Si $u_1 = 2$, entonces $(x-2)^3 = 2$, de donde $x_1 = \sqrt[3]{2} + 2$.
Si $u_2 = -1$, entonces $(x-2)^3 = -1$, de donde $x_2 = \sqrt[3]{-1} + 2 = -\sqrt[3]{1} + 2$.
Por lo tanto, $S = \left\{\sqrt[3]{2} + 2, -\sqrt[3]{1} + 2\right\}$.

Actividades

26. Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones, utilizando la sustitución adecuada en el caso que haga falta.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

b) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

c) $(x+3)^4 - (x+3)^2 = \frac{3}{4}$

d) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 = 0$

e) $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

Problemas de aplicación con ecuaciones

Concentraciones

En la vida diaria expresamos el término concentración o pureza para distinguir la relación que existe entre la cantidad que hay de una sustancia en un volumen. Por ejemplo:

$$\text{concentración de jugo} = \frac{\text{cantidad de jugo}}{\text{cantidad total de líquido de la jarra}}$$

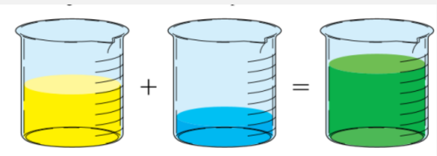
o en una masa

$$\text{pureza del oro} = \frac{\text{cantidad de oro}}{\text{peso del lingote}}$$

¿Cuál es la concentración de 250 ml de jugo en una jarra de un litro?

Como un litro son 1000 ml, tenemos que la concentración de jugo es $\frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$

Se tiene un litro de jugo con un 40% de pulpa y se pretende agregar agua para obtener otro jugo con el 15% de pulpa. Modeliza la situación dada. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para obtener el nuevo jugo?



En este caso elegimos como unidad los litros, ya que la información está dada de esta manera y tenemos que responder también en esta unidad.
Para modelizar la situación, calcularemos en primer lugar la cantidad de pulpa que tenemos. Para ello, utilizaremos la información que tenemos de la concentración

$$concentración\ de\ jugo\ = \frac{cantidad\ de\ pulpa}{cantidad\ total\ de\ líquido\ de\ la\ jarra} = 40\%$$

Por lo tanto, sabiendo que podemos expresar 40% *como* $\frac{40}{100}$ *tenemos la ecuación:*

$$\frac{cantidad\ de\ pulpa}{1\ litro} = \frac{40}{100}$$

De la cual podemos deducir que la cantidad de pulpa es 0,4 litros.
Llamemos ahora x a la cantidad de agua que vamos a agregar al jugo. Si al litro de jugo que tenemos le agregamos x litros de agua, la cantidad de pulpa va a seguir igual $(0{,}4\ litros)$ *mientras que la cantidad de líquido total (el jugo diluído) va a ser* $1 + x\ litros$*. Entonces la nueva concentración de pulpa será*

$$\frac{0{,}4\ litros}{1 + x\ litros}$$

Como queremos que la concentración final sea del 15%*, obtenemos la siguiente modelización de la situación*

$$\frac{0{,}4\ litros}{1 + x\ litros} = \frac{15}{100}$$

Finalmente, para responder a la pregunta sobre los litros de agua necesarios para obtener el nuevo jugo, lo único que nos resta por hacer es resolver la ecuación

$$\frac{0{,}4\ litros}{1 + x\ litros} = \frac{15}{100}$$

$$0{,}4\ litros = \frac{15}{100}(1 + x)litros$$

$$0{,}4\ litros.\frac{100}{15} = (1 + x)litros$$

$$\frac{40}{15}litros = (1 + x)litros$$

$$\left(\frac{40}{15} - 1\right)litros = x\ litros$$

$$\frac{25}{15}\ litros = x\ litros$$

Por lo tanto, debemos agregar $\frac{25}{15}$ *litros de agua para obtener un jugo con una concentración de pulpa del* 15%*.*

Actividades

27. Escribe las expresiones correspondientes a
    a) la concentración alcohol que hay en una botella de vino de 750 ml, si se sabe que contiene 140 ml de alcohol.
    b) la cantidad de oro que posee un lingote de un kilo de 20% de pureza.

Mezclas

En los problemas de mezcla, tenemos dos cantidades de un cierto producto con distintos porcentajes y queremos hacer una mezcla de esas cantidades, con un nuevo porcentaje. Si llamamos p_1, p_2 y p_3 a los diferentes porcentajes y c_1 y c_2 a las diferentes cantidades tenemos que

$$\frac{p_1}{100}.c_1 + \frac{p_2}{100}.c_2 = \frac{p_3}{100}(c_1 + c_2)$$

Si tenemos 2 litros de jugo al 20% y lo mezclamos con un litro de jugo al 60%, ¿Cuál será el porcentaje de a mezcla resultante?

Tenemos que

$$\frac{20}{100}.2 + \frac{60}{100}.1 = \frac{p_3}{100}(2+1)$$

$$\left(\frac{40}{100} + \frac{60}{100}\right).\frac{100}{3} = p_3$$

de donde $p_3 = \frac{100}{3} = 33,\hat{3}\%$

Actividades

28. Modeliza y resuelve las siguientes situaciones
    a) Un fabricante de ron desea producir 600 litros de un ron especial con un grado alcohólico de 26 %. Si dispone de un ron añejo de 30 % de grado alcohólico y otro ron de 20% de alcohol ¿Qué cantidad de cada ron deberá mezclar para obtener la cantidad deseada del ron especial?
    b) Se tienen dos lingotes de oro, uno tiene un 60% de pureza y el otro un 96%. Queremos mezclar 4 kg del primer tipo y 2 kg del segundo, ¿de qué pureza será la mezcla obtenida?

Precios

Un caso muy similar al anterior es el referido a precios de productos. Tenemos un producto con dos calidades diferentes, y distintos precios y queremos mezclarlos para obtener un producto con una calidad diferente. Sean p_1, p_2 y p_3 los diferentes precios y c_1, c_2 las distintas cantidades, entonces

$$p_1.c_1 + p_2.c_2 = p_3(c_1 + c_2)$$

Si tenemos 5 kilos un café que cuesta \$20, y queremos mezclarlo con un café que cuesta \$50 el kilo, para obtener una mezcla que cueste \$35. ¿Cuánto café del segundo tipo debemos agregar?

Si llamamos x a la cantidad de kilos de café del segundo tipo, entonces

$$20.5 + 50.x = 35(5 + x)$$

por lo que $x = 5$.

Actividades

29. Modeliza y resuelve las siguientes situaciones
    a) Un comerciante quiere hacer un té especial mezclando dos variedades. Del primer tipo de té, que tiene un costo de \$10 el kilo desea utilizar 5 kilos. ¿Cuántos kilos debe usar del segundo tipo de té, que tiene un costo de \$50 el kilo para que la mezcla cueste \$25 el kilo?
    b) Se quiere hacer una variedad especial de jugo mezclando dos variedades. Del primer tipo de jugo, que tiene un costo de \$50 el litro se desean utilizar 4 litros. ¿Cuántos litros debe usar del segundo tipo de jugo, que tiene un costo de \$20 el litro para que la mezcla cueste \$40 el litro?

Trabajo compartido

Existen ciertas magnitudes que se expresan por unidad de tiempo; por ejemplo la velocidad, o el trabajo por unidad de tiempo. Esto se puede asociar al trabajo que realiza una persona en un tiempo determinado. Este trabajo puede ser: pintar una pared, cavar un túnel, llenar una pileta, etcétera.

Se conoce como rendimiento a la cantidad de trabajo realizado en determinado tiempo

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Trabajo}}{\text{Tiempo}}$$

Cuando hay más de una persona o máquina realizando el mismo trabajo, el rendimiento se suma

$$\text{Rendimiento}_1 + \text{Rendimiento}_2 = \frac{\text{Trabajo}}{\text{Tiempo}_1} + \frac{\text{Trabajo}}{\text{Tiempo}_2}$$

Y esto nos permite calcular el rendimiento total.

Si sabemos que Emanuel demora 4 horas en cortar el pasto de un terreno y Alberto demora 6 horas en hacer ese mismo trabajo, calcular el tiempo que les llevará cortar el pasto si ambos trabajan juntos.

Sabemos que para Emanuel, el rendimiento puede ser expresado como $E = \frac{1}{4\,hs}$ *mientras que para Alberto, podemos expresarlo como* $A = \frac{1}{6\,hs}$*. Si ambos están trabajando juntos, tenemos que el rendimiento compartido es*

$$E + A = \frac{1}{4\,hs} + \frac{1}{6\,hs} = \frac{3.1 + 2.1}{12\,hs} = \frac{5}{12\,hs}.$$

Si llamamos x *a la cantidad de horas que demoran en cortar el pasto del terreno trabajando juntos, obtenemos la ecuación*

$$\frac{5}{12\,hs} = \frac{1}{x}$$

De lo cual podemos deducir que $x = 2{,}4$ *horas.*

Actividades

30. Expresa y calcula el tiempo que tardan dos personas en pintar juntas una pared, si una de ellas sola demora 2 hs y la otra 2.5 hs. ¿Cuánto tiempo tardan en pintar $\frac{1}{3}$ de pared?

Llenado y vaciado

Si ahora hablamos de una canilla que tarda un tiempo determinado en llenar una piscina, esta magnitud se conoce como caudal y lo expresamos como V/t, donde V es el volumen de la piscina y t el tiempo que tardo en llenarla. Si hay dos canillas que demoran diferentes tiempos t_1 y t_2 en llenar la piscina de volumen V, el tiempo t que tardan las dos juntas cumplirá que

$$\frac{V}{t} = \frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2}$$

Si ahora abrimos una rejilla que vacía la piscina en un tiempo $t_3$tenemos

$$\frac{V}{t} = \frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2} - \frac{V}{t_3}$$

Un caño A puede llenar un pozo vacío en 3 horas; otro caño B ubicado en el fondo del pozo puede vaciarlo en 6 horas. Estando vacío el pozo, se abren los dos caños a la vez. ¿En qué tiempo llenan el pozo hasta las $\frac{2}{3}$ *partes?*

Utilizando las ecuaciones que vimos antes, podemos modelizar el problema como sigue

$$\frac{2/3}{t} = \frac{1}{3\,hs} - \frac{1}{6\,hs}$$

Donde t es el tiempo que demandará llenar el pozo hasta las $\frac{2}{3}$ *partes.*

Si restamos las fracciones del segundo miembro obtenemos

$$\frac{2/3}{t} = \frac{2-1}{6\,hs} = \frac{1}{6\,hs}$$

Por lo que

$$\frac{2}{3} = \frac{t}{6\,hs}$$

Es decir,

$$\frac{2}{3} . 6\,hs = t$$

De lo que podemos concluir que $t = 4$ *horas.*

Por lo tanto, si se abren ambos caños simultáneamente se demorarán 4 horas en llenar el pozo hasta las $\frac{2}{3}$ *partes.*

Actividades

31. Modeliza y resuelve las siguientes situaciones
    a) El tiempo que tarda una piscina en llenarse por una canilla que tardaría 4 horas en llenarla trabajando sola, y se deja abierta la rejilla de vaciado que demora 6 horas en vaciarla.
    b) Una piscina que tarda tres horas en llenarse utilizando dos canillas con el mismo caudal.

Polinomios

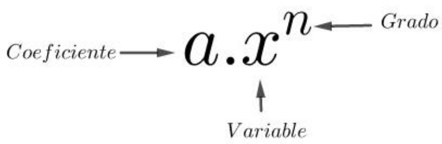
Un **polinomio** en la variable x es una expresión algebraica que puede expresarse de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

en la que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

Un **monomio** en una variable x es una expresión algebraica de la forma ax^n, en la que a es un número real y n es un número natural. Por lo tanto un polinomio puede definirse como la suma de monomios.

Dado el monomio ax^n, la parte numérica a es el **coeficiente** del monomio y el exponente n de la variable x es el **grado** del monomio.



El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de sus términos o monomios. Si $a_n \neq 0$, tenemos que el grado es n y se denota $gr(P(x)) = n$.

El coeficiente a_n se llama **coeficiente principal**.

Si $a_n = 1$ el polinomio se llama **mónico.**

El término a_0 se conoce como término independiente. El término $a_1 x$ es el término lineal, $a_2 x^2$ es el término cuadrático, $a_3 x^3$ es el término cúbico, etc.

Es conveniente escribir el polinomio en forma reducida y ordenado de mayor a menor grado. Así, el polinomio $P(x) = x - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 3 - x^2 - 2$ escrito en forma ordenada y reducida resulta $P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$. Esta manera de escribir un polinomio nos permite identificar de forma rápida su grado y su término independiente. Además, nos facilitará las operaciones que debamos efectuar con él.

Utilizaremos letras mayúsculas para nombrar a los polinomios, por lo general $P, Q, R, S, \ldots$ y se indicará entre paréntesis la variable correspondiente. Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales se lo denota $\mathbb{R}[x]$, donde $\mathbb{R}$ denota el conjunto al que pertenecen los coeficientes, y x es la variable.

Tradicionalmente se decía que el monomio estaba formado por un término y el polinomio estaba formado por la suma de al menos dos términos (si son dos se llama binomio, tres trinomio, cuatro cuatrinomio, etc.); sin embargo, cuando nos refiramos a los polinomios hablaremos de monomios, binomios, trinomios y, en general, a expresiones de uno o varios términos.

Un polinomio particularmente importante es el **polinomio nulo**, que corresponde a tomar todos los coeficientes a_i como cero y lo denotamos $0(x)$. Este polinomio no tiene grado.

> $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$ es un trinomio de grado 2, con coeficiente principal 3 y término independiente 1.

> $Q(x) = x^7 - 2x^5 + 4x^3 + 6x$ es un polinomio de grado 7, mónico. $Q(x)$ está incompleto ya que no figuran todas las potencias hasta 7 (porque $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$).

$R(x) = 3$ es un monomio de grado 0, que solo consta del término independiente 3.

Aplicación de polinomios

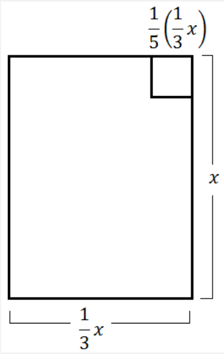
Los polinomios generalmente se aplican a la hora de calcular perímetros, áreas y volúmenes, pero la aplicación de los polinomios va más allá, y se usan mucho en la ingeniería, medicina, la ciencia, la química, entre otros.

Se posee un terreno rectangular del que se sabe que la medida del frente mide un tercio de la medida del largo y que en el terreno se quiere hacer un corral cuadrado cuyos lados midan $\frac{1}{5}$ de la medida del frente.

¿Cuántos metros de alambre habrá que comprar para poder cercar el terreno y el corral, sabiendo que el corral estará en una esquina del terreno?

¿Cuál es el área del terreno que queda por fuera del corral?

Primero podemos hacer un esquema gráfico donde volcaremos los datos



Entonces la cantidad de alambrado que necesitamos comprar queda expresado con el polinomio $P(x) = x + \frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right)$ *y si operamos nos queda* $P(x) = \frac{42}{15}x$.

Si ahora del mismo terreno queremos calcular cuál es el área que queda libre (fuera del corral), lo que debemos hacer es calcular el área del terreno y a la misma restarle el área del corral.

Tenemos entonces que $A(x) = x.\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right).\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2 - \left(\frac{1}{15}x\right)^2 = \frac{74}{225}x^2$.

Actividades

32. Determina cuál de las siguientes expresiones son polinomios, y en el caso de serlo determine el grado, coeficiente principal y término independiente

a) $M(x) = \frac{3}{x^2} + 2x + 1$ b) $P(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^6 - 0x^9 + \sqrt{2} + 1$

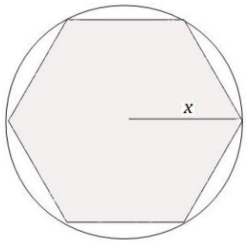
c) $Q(x) = x^2 + 2x + x^5 - 2\sqrt{x}$ d) $E(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

e) $H(x) = \sqrt{2}.x^3 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x$

33. Se quiere pintar una rampa de x metros de altura, una longitud horizontal de x metros, de 7 metros de anchos y tapas en los costados.

a) Determina la expresión algebraica que representa el área total a pintar. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justifica.
b) Si se desea rellenarla con cemento, determina la expresión algebraica que representa el volumen a rellenar. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justifica.

34. Obtiene la expresión algebraica que representa el área de un hexágono regular inscripto en un círculo de radio x. Dicha expresión algebraica, ¿es un polinomio? Justifica.



Igualdad de polinomios

Dos polinomios no nulos son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales. Es decir, dados

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$$

tenemos que $P(x) = Q(x)$ solo si $n = m$, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ... $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0$.

Las igualdades anteriores se podrían haber resumido al pedir que $n = m$ y $a_i = b_i$ para $i = 0, \dots, n$.

$P(x) = 9x^2 - x + 1$ y $Q(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$ son dos polinomios distintos ya que el $gr\big(P(x)\big) = 2 \neq gr\big(Q(x)\big) = 3$.

$P(x) = x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 - 5x - 3$ son dos polinomios distintos ya que el coeficiente del término lineal de $P(x)$ es 2 y el del término lineal de $Q(x)$ es -5.

Dos polinomios son **opuestos** sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son opuestos. Es decir, para el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

su opuesto será

$$Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x^1 - a_0$$

y por lo general se lo denotará como $-P(x)$ al opuesto de $P(x)$.

Los polinomios no tienen signos, en el sentido que no existe un polinomio positivo, o uno negativo. $-P(x)$ solo representa un polinomio en el cual los coeficientes son los opuestos los coeficientes de $P(x)$.

Actividades

35. Dados $P(x) = 3x^2 + 6x - 2$ y $Q(x) = ax^2 + 2ax - b$. Determina el valor de a y de b para que $P(x) = Q(x)$.
36. Determina el opuesto de $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 8$.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para sumar polinomios veamos el procedimiento con un ejemplo

Suma de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para sumar dos polinomios se agrupan los términos del mismo grado y se suman sus coeficientes.	Dados $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ tenemos que $P(x) + Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) + (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) = 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + (-2+5)x + (3-3) = 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 3x$

Para restar dos polinomios hacemos como con los números enteros, pensamos a la resta como la suma del opuesto, es decir

$$P(x) - Q(x) = P(x) + \left(-Q(x)\right)$$

Observemos que si $gr\left(P(x)\right) \neq gr\left(Q(x)\right)$, el grado de la suma será igual al de mayor grado, pero *si* $gr\left(P(x)\right) = gr\left(Q(x)\right)$ podría pasar que el grado disminuya.

> Si $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = -2x^2 + 2x - 5$, tenemos que
> $$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^2 - 3x + 4) + (-2x^2 + 2x - 5) \\ &= (2-2)x^2 + (-3+2)x + (4-5) \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Dados $P(x), Q(x)$ y $R(x) \in \mathbb{R}[x]$ valen las siguientes propiedades:

- $gr\left(P(x) + Q(x)\right) \leq max\left\{gr\left(P(x)\right), gr\left(Q(x)\right)\right\}$ o $P(x) + Q(x)$ no tiene grado (en el caso que $Q(x)$ sea el opuesto de $P(x)$).

Además en la suma de polinomios valen las mismas propiedades que cumplen los enteros, es decir:

- Ley de cierre: la suma de dos polinomios da como resultado un polinomio.
- Conmutatividad: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$.
- Asociatividad: $P(x) + \left(Q(x) + R(x)\right) = \left(P(x) + Q(x)\right) + R(x)$.
- Existencia del Neutro: $P(x) + 0(x) = P(x)$.

- Existencia del Opuesto: $P(x) + \big(-P(x)\big) = 0(x)$.

Producto

Para multiplicar monomios se asocian y operan los coeficientes y las partes de las potencias por separado, recordando que al multiplicar potencias de igual base se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$ax^m . bx^n = (a.b)x^{m+n}$$

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes.

Por ejemplo, si $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$, entonces para multiplicarlos debemos proceder como en el siguiente cuadro:

Multiplicación de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
• Escribimos los dos polinomios, uno debajo del otro • Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios de que consta el segundo polinomio. • Sumamos los polinomios obtenidos.	$5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ x$-4x^3 + 2x - 6$ $-30x^3 - 18x^2 + 18x - 24$ $10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x$ $-20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3$ $-20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$ Entonces $P(x).Q(x) = -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$

Este mismo producto se puede realizar sin alinear los términos resultantes del producto por cada monomio, pero hay que ser cuidadosos para no olvidarnos de ningún término.

> $(5x^3 + 3x^2 - 3x + 4).(-4x^3 + 2x - 6)=$
>
> $= -20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3 + 10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x - 30x^3 - 18x^2 + 18x - 24=$
>
> $= -20x^6 - 12x^5 + (10 + 12)x^4 + (-30 + 6 - 16)x^3 + (-18 - 6)x^2 + (18 + 8)x - 24=$
>
> $= -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24.$

Después de efectuar la distributiva debemos contar la cantidad de términos. Ésta debe ser igual al producto de las cantidades de cada factor. En nuestro ejemplo $P(x)$ tiene 4 términos, y $Q(x)$ tiene 3, por lo que después de la distributiva debemos tener 12 términos. Un vez que reacomodamos y sumamos, esta cantidad puede disminuir.

Propiedades del producto

- Dados $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que

$$gr\big(P(x).Q(x)\big) = gr\big(P(x)\big) + gr\big(Q(x)\big)$$

Al igual que con la suma, las propiedades del producto se mantienen iguales a las de los enteros. Es decir, dados $P(x), Q(x)$ y $R(x) \in \mathbb{R}[x]$:

- Ley de cierre: El producto de dos polinomios es también un polinomio.
- Conmutatividad: $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$

- Asociatividad: $P(x).\big(Q(x).R(x)\big) = \big(P(x).Q(x)\big).R(x)$
- Existencia del neutro: Existe el polinomio $Q(x) = 1$, tal que $P(x).1 = P(x)$
- No existe el inverso para todo polinomio. En efecto, si se trata de un polinomio $P(x)$ tal que $gr\big(P(x)\big) \geq 1$, al multiplicarlo por cualquier otro polinomio el resultado tiene grado mayor o igual a 1 (o es el nulo), y para ser el polinomio 1 debe tener grado 0.

Propiedad distributiva

Sigue valiendo la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, es decir

$$P(x).\big(Q(x) + R(x)\big) = P(x).Q(x) + P(x).R(x)$$

Actividades

37. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + 5$

$R(x) = x + 2$ $\qquad$ $S(x) = 3x + 3$

Calcula y analiza el grado del polinomio resultante.

a) $P(x) - S(x)$
b) $R(x).S(x)$
c) $Q(x) + R(x) + S(x)$
d) $\big(P(x) + R(x)\big) \cdot Q(x)$
e) $S(x) \cdot R(x) - P(x)$
f) $\big(P(x) + R(x)\big) \cdot \big(Q(x) - P(x)\big)$

Algunos productos especiales: Trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, cuatrinomio cubo perfecto

- $(x + a).(x - a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$
- $(x + a)^2 = (x + a).(x + a) = x^2 + a.x + a.x + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Notar que $x - a = x + (-a)$ por lo que podemos considerar el desarrollo de $(x - a)^2$ es un caso particular del desarrollo de $(x + a)^2$ haciendo uso de la regla de los signos.

- $(x - a)^2 = (x)^2 + 2.(x)(-a) + (-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
- $(x + a)^3 = (x + a)^2.(x + a) = (x^2 + 2ax + a^2).(x + a)$
$$= x^3 + 2ax^2 + a^2x + ax^2 + 2a^2x + a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
- $(x - a)^3 = (x)^3 + 3.(x)^2(-a) + 3(x)(-a)^2 + (-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Resumiendo, tenemos:

$(x+a).(x-a) = x^2 - a^2$	Diferencia de cuadrados
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	Trinomio cuadrado perfecto de la suma
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$	Trinomio cuadrado perfecto de la resta
$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	Cuatrinomio cubo perfecto de la suma
$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$	Cuatrinomio cubo perfecto de la resta

Actividades

38. Desarrollar los siguientes productos especiales
    a) $(x-4).(x+4)$
    b) $(x+6)^2$
    c) $(x-4)^2$
    d) $(x+1)^3$
    e) $(x-2)^3$
39. Comprobar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

División

Algoritmo de la división

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$con $Q(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $C(x)$ (polinomio cociente) y $R(x)$ (polinomio resto), tales que

$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$ con $R(x) = 0$ o $gr(R(x)) < gr(Q(x))$.

En el caso en el que $gr(P(x))$ es menor que $gr(Q(x))$, entonces $C(x) = 0$ y $R(x) = P(x)$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Por la propiedad vista sobre el grado del producto, podemos deducir que

$$gr\big(P(x)\big) = gr\big(Q(x)\big) + gr\big(C(x)\big)$$

División tradicional

Para dividir dos polinomios procedemos según el siguiente cuadro:

División de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo es incompleto, dejamos espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.	Divide el polinomio $3x^5+3x^3-x^2-4$ por el polinomio x^3+2x^2+1 $3x^5+3x^3-x^2-4 \;\lfloor\; x^3+2x^2+1$
Dividimos el primer monomio del dividendo (en este caso $3x^5$) entre el primer monomio del divisor (x^3). Multiplicamos el cociente obtenido por el divisor y escribimos el opuesto del resultado.	$3x^5 \quad +2x^3 \quad -x^2 \quad -4 \;\lfloor\; x^3+2x^2+1$ $-3x^5-6x^4 \quad -3x^2 \qquad 3x^2$
Sumamos el producto obtenido con el signo opuesto con el dividendo.	$3x^5 \quad +2x^3 \quad -x^2 \quad -4 \;\lfloor\; x^3+2x^2+1$ $-3x^5-6x^4 \quad -3x^2 \qquad 3x^2$ $-6x^4+2x^3-4x^2$
Se baja el siguiente término del dividendo, en nuestro caso no hay, y se repite el mismo proceso.	$3x^5 \quad +2x^3 \quad -x^2 \quad -4 \;\lfloor\; x^3+2x^2+1$ $-3x^5-6x^4 \quad -3x^2 \qquad 3x^2-6x$ $-6x^4+2x^3-4x^2$ $6x^4+12x^3-4x^2$
El proceso continúa hasta que se obtiene un resto de grado menor que el grado del divisor. En el ejemplo, el grado del divisor era 3 y hemos obtenido un resto de grado 2.	$3x^5 \quad +2x^3 \quad -x^2 \quad -4 \;\lfloor\; x^3+2x^2+1-$ $3x^5-6x^4 \quad -3x^2 \qquad 3x^2-6x+14$ $-6x^4+2x^3-4x^2$ Cociente $6x^4+12x^3-4x^2$ $14x^3-4x^2+6x-4$ $-14x^3-28x^2 \quad -14$ $-32x^2+6x-18$ Resto

Divisibilidad

Un polinomio es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio. Un polinomio es divisor de otro, si al dividir el segundo con el primero la división es exacta. Es decir, dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, diremos que $P(x)$ divide a $Q(x)$ si existe otro polinomio $R(x)$ tal que $Q(x)=P(x).R(x)$.

En este caso es equivalente a decir que:

- $P(x)$ divide a $Q(x)$.
- $Q(x)$ es divisible por $P(x)$.
- $P(x)$ es factor de $Q(x)$.
- $Q(x)$ es un múltiplo de $P(x)$.
- $P(x)$ es un divisor de $Q(x)$.

> Si $P(x)=x-1$ y $Q(x)=x^2-1$, tenemos que $P(x)$ divide a $Q(x)$ ya que existe $R(x)=(x+1)$ tal que
> $P(x).R(x)=(x-1).(x+1)=\mathrm{x}^2+x-x-1=x^2-1 \quad =Q(x)$

Actividades

40. Efectúe, en el caso que sea posible, las siguientes divisiones, indicando en cada ítem el polinomio cociente y el polinomio resto.

    a) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x + 2)$

    b) $(4x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 21x^2) : (x^7 + 3x)$

    c) $(2x^3 - 24x^2 + 4x^4 + 18x) : (2x^3 - 3x)$

    d) $(4x^3 - 3x^2 + 7) : (2x - 6)$

    e) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 8) : (2x + 1)$

41. Escriba el Algoritmo de la división obtenido al efectuar las divisiones del ejercicio anterior. Y en cada caso señala cuándo el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

Regla de Ruffini

Para el caso particular en que el divisor es un binomio lineal de la forma $(x - a)$ con $a \in \mathbb{R}$, el cociente y el resto pueden obtenerse aplicando la **Regla de Ruffini**[4].

Los coeficientes del cociente se obtienen así: El primer coeficiente es igual al coeficiente de $P(x)$ y cada uno de los sucesivos coeficientes es igual al coeficiente siguiente de $P(x)$ más el producto del coeficiente anterior de $P(x)$ por a. El último número así obtenido es el resto de la división.

Veamos un ejemplo para que quede más claro. Sea $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 15x - 12$ y $D(x) = x - 3$, entonces para efectuar la división utilizaremos la siguiente disposición práctica: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x)$ ordenados de manera decreciente de acuerdo al grado de los monomios y de manera completa en la fila superior, y el valor de a a la izquierda de la línea vertical.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -15 & -12 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \boxed{} \end{array}$$

El primer coeficiente de $P(x)$ coincide con el primer coeficiente que buscamos. Lo repetimos en la última fila.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -15 & -12 \\ 3 & & & & \\ \hline & 2 & & & \boxed{} \end{array}$$

Multiplicamos ese coeficiente por a y escribimos el resultado debajo del siguiente coeficiente de $P(x)$. Luego sumanos y así obtenemos el segundo coeficiente buscado.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -15 & -12 \\ 3 & & 6 & & \\ \hline & 2 & 9 & & \boxed{} \end{array}$$

Repetimos el procedimiento de multiplicar por a y luego sumar al coeficiente correspondiente de $P(x)$ para así obtener el tercer coeficente.

[4]Esta regla se conoce así pues fue publicada por Paolo Ruffini (1765-1822) un matemático, filósofo y médico italiano.

	2	3	-15	-12
3		6	27	
	2	9	12	

Volvemos a repetir, para en este caso, obtener el resto.

	2	3	-15	-12
3		6	27	36
	2	9	12	24

Por la regla de los grados, sabemos que $gr\big(Q(x)\big) = gr\big(P(x)\big) - 1$, por lo que en este caso, el grado de $Q(x)$ es 2. Como ya tenemos los coeficientes podemos determinar que $Q(x) = 2x^2 + 9x + 12$ y que $R(x) = 24$.

Si queremos dividir $P(x)$ por $(x + a)$, vamos a utilizar la misma regla, pero utilizando $-a$ del lado izquierdo de la línea vertical, ya que $(x + a) = \big(x - (-a)\big)$.

Actividades

42. Calcula el cociente y el resto de las siguientes operaciones, utilizando la Regla de Ruffini
    a) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x + 2)\ : (x - 2)$
    b) $(x^3 + 1) : (x + 1)$
    c) $(x^3 + 3x)\ : (x + 2)$
    d) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

Valor numérico

El **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por $P(a)$.

> El valor numérico de $P(x) = 4x^3 - 2x + 1$ en $x = 2$ es $P(2) = 4.(2)^3 - 2.2 + 1 = 32 - 4 + 1 = 29$.

Teorema del Resto

El resto de la división del polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir $P(a)$.

> Si dividimos el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ por el polinomio $x - 3$, obtenemos que el cociente es $x^2 + 8x + 22$ y el resto es 42. Dejamos al lector la comprobación.
> Ahora, si calculamos $P(3)$ obtenemos
> $$P(3) = (3)^3 + 5.(3)^2 - 2.3 - 24 = 27 + 45 - 6 - 24 = 42.$$

Es fácil ver por qué es válido este Teorema. Primero observemos que, por el algoritmo de la división, si dividimos $P(x)$ por $(x - a)$ el resto debe ser de grado 0, o ser el polinomio nulo, lo cual lo podemos resumir diciendo que $R(x) = R$ constante.

Por otro lado, por el mismo algoritmo tenemos que $P(x) = (x - a).Q(x) + R$. Entonces, si evaluamos en el valor a notamos que $P(a) = (a - a).Q(x) + R = 0 + R = R$, por lo que el valor numérico en $x = a$ es realmente el resto.

Actividades

43. Calcula para los polinomios $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 5x - 1$ y $\mathrm{Q}(x) = x + 2$ los siguientes valores numéricos:
    a) $\mathrm{P}(1)$
    b) $\mathrm{P}(-1)$
    c) $\mathrm{Q}(0)$
    d) $\mathrm{Q}(-2)$
44. Utilizando el Teorema del Resto, obtiene el resto de dividir al polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$ por
    a) $(x + 2)$
    b) $(x + 1)$
    c) $(x - 1)$
    d) $(x - 2)$
45. Encontrar el valor de k para que al dividir $P(x) = 2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé como resto 4. ¿Con qué teorema puedes justificar tu respuesta?
46. Si se sabe que en la división de $P(x) = x^2 - 4x + 3$ por $(x - c)$ se obtiene un resto igual a -1, ¿cuáles son los posibles valores de c?
47. Sea $P(x) = 24x^{100} + 36x^{50} - 25x^{25} + 50x^5 + 15x^3 - 5$.
    a) Si se lo divide por $(x + 1)$, ¿cuál es el resto?
    b) ¿El polinomio $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$?
48. Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 + 2kx^2 - 3x + 5$ ¿Qué valor debe tomar k para que el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x + 3)$ sea 10?

Generalización del Teorema del Resto y de Ruffini

Dados $P(x) = 3x^3 - 2x + x - 4$ y $d(x) = 2x - 1$. Si queremos encontrar el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $d(x)$, es claro que no podemos utilizar la Regla de Ruffini ni el Teorema del Resto como los vimos antes, ya que el divisor no tiene la forma $x - a$.

Para poder resolver esta situación, podemos hacer uso del Algoritmo de la división, que nos asegura que existen $C(x)$ y $R(x)$ (que son únicos) tales que

$$P(x) = (2x - 1).C(x) + R(x).$$

Sabemos que $R(x) = R$ es constante por el grado que tiene el dividendo, y es el resto de dividir a $P(x)$ por $d(x)$ y que $C(x)$ es el cociente. En este caso sacando factor común 2, podemos escribir la igualdad anterior como

$$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right).C(x) + R$$

De esta igualdad es fácil observar que:

- Calcular el valor numérico de $P(x)$ en $x = \frac{1}{2}$ obtenemos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = R$.
- La expresión también se puede escribir utilizando $C'(x) = 2C(x)$, teniendo $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).C'(x) + R$.

Notemos que $C'(x)$ y R son respectivamente el cociente y el resto de dividir a $P(x)$ por $x - \frac{1}{2}$.

Para el ejemplo, el resto de dividir a $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, por el Teorema del Resto es

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -\frac{29}{8}$$

Usando Ruffini para dividir $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1/2 & & 3/2 & -1/4 & 3/8 \\ \hline & 3 & -1/2 & 3/4 & \boxed{-29/8} \end{array}$$

de donde se concluye también que el resto de esta división es $-\frac{29}{8}$.

El cociente de dividir a $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es $C'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, por lo cual el cociente de dividirlo por $2x - 1$, es $C(x) = \frac{C'(x)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$.

Esto nos permite generalizar el Teorema del Resto.

Generalización del Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(ax - b)$ es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Para obtener el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por otro polinomio de la forma $(ax - b)$ consideramos el algoritmo de la división resultando

$$P(x) = (ax - b)C(x) + R$$

Extraemos factor común a y trabajamos con $P(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)\underbrace{(a.C(x))}_{C'(x)} + R$

Al efectuar la división por Ruffini de $P(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$, el resto que se obtiene es el mismo R, pero para obtener el cociente $C(x)$ dividimos por a al cociente $C'(x)$ obtenido por Ruffini.

Esto nos permite generalizar la Regla de Ruffini.

Generalización de la Regla de Ruffini

El cociente de la división de $P(x)$ por $ax - b$ es $\frac{C(x)}{a}$ donde $C(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ y el resto es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Actividades

49. Calcula el cociente y el resto de la siguientes divisiones utilizando la generalización de Ruffini

a) $(x^4 - 2x^3 + x - 3) : (3x - 6)$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x + 1)$

c) $(8x^4 + 6) : (6x - 3)$

50. Para las divisiones del ejercicio anterior comprueba el valor del resto utilizando la generalización del Teorema del Resto.

51. Calcula el valor de c para que el polinomio $P(x) = 9x^2 - cx + 4$ sea divisible por $Q(x) = 3x - 1$.

Raíces de un polinomio

El número real a es una **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Notemos que por el Algoritmo de la división y el Teorema del Resto, podemos deducir que si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x) = (x - a).Q(x)$ para algún polinomio $Q(x)$. Además, en ese caso, $gr\big(Q(x)\big) = gr\big(P(x)\big) - 1$.

> Si $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ y calculamos $P(-4)$ tenemos que $P(-4) = (-4)^3 + 5.(-4)^2 - 2.(-4) - 24 = -64 + 80 + 8 - 24 = 0$, por lo que 4 es una raíz de $P(x)$, y por Ruffini podremos calcular $Q(x)$.

Propiedad de raíces de polinomios

Si a es raíz de $P(x)$ y $Q(x) = k.P(x)$, entonces a también es raíz de $Q(x)$.

> 2 es raíz de $P(x) = (x - 3)(x - 2)$. Si $Q(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 3)(x - 2)$ tenemos que 2 es raíz de $Q(x)$ y es fácil de verificar ya que $Q(2) = 2.(2 - 3)(2 - 2) = 0$.

Observemos que un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces reales. Es decir, si tenemos un polinomio de grado n y ya le conocemos n raíces, sabemos que no hay más raíces.

En este curso solo trabajamos en el conjunto de los números reales, por lo tanto cuando hablemos de raíces nos estamos refiriendo solo a raíces reales.

> $P(x) = 3x - 2$ tiene una raíz.
> $Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ tiene dos raíces.
> $R(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces.
> $S(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ solo tiene una raíz.

Teoremas para hallar raíces enteras o racionales

Existen dos teoremas que nos van a ayudar a encontrar las raíces de los polinomios con coeficientes enteros.

Teorema 1: Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz entera a, entonces a divide al término independiente.

Halla todas las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Si queremos encontrar las raíces de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, *sabemos que como el polinomio es de grado 3, va tener a lo sumo 3 raíces. También confirmamos que los coeficientes del polinomio sean todos enteros. Como en este caso lo son, buscamos los divisores del término independiente, es este caso 4.*

$$\textit{Divisores de } 4 = \{1, -1, 2, -2, 4, 4\}.$$

Utilizamos entonces el Teorema del Resto para ver cuáles de estos candidatos realmente son raíces.

Tenemos que:

$P(1) = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$, *entonces 1 es raíz de* $P(x)$.

$P(-1) = -1 - 1 + 4 + 4 = 6 \neq 0$, *entonces -1 no es raíz de* $P(x)$.

$P(2) = 8 - 4 - 8 + 4 = 0$, *entonces 2 es raíz de* $P(x)$.

$P(-2) = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$, *entonces -2 es raíz de* $P(x)$.

Como ya hallamos 3 raíces podremos finalizar la búsqueda. Por lo tanto el conjunto de las raíces enteras de $P(x)$ *es:*

$$\textit{Raíces de } P(x) = \{1, 2, -2\}.$$

Halla todas las raíces del polinomio $P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$.

Si queremos hallar las raíces enteras de $P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$, *lo primero que notamos es que los coeficientes del polinomio no son enteros, por lo que no podríamos aplicar el Teorema, pero si llamamos* $Q(x) = 2.P(x)$, *por la propiedad anterior sabemos que* $Q(x)$ *debe tener las mismas raíces que* $P(x)$ *y además* $Q(x) = x^2 + x - 2$ *tiene todos los coeficientes enteros, por lo que se le puede aplicar el Teorema. Sabemos además por el grado del polinomio que podemos hallar a lo sumo 2 raíces.*

Buscamos los divisores del término independiente

$$\textit{Divisores de } -2 = \{1, -1, 2, -2\}.$$

Tenemos entonces que:

$Q(1) = 1 + 1 - 2 = 0$, *entonces 1 es raíz de* $P(x)$.

$Q(-1) = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$, *entonces -1 no es raíz de* $P(x)$.

$Q(2) = 4 + 2 - 2 = 4 \neq 0$, *entonces 2 no es raíz de* $P(x)$.

$Q(-2) = 4 - 2 - 2 = 0$, *entonces -2 es raíz de* $P(x)$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\textit{Raíces de } Q(x) = \textit{Raíces de } P(x) = \{1, -2\}$$

Teorema 2: Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz fraccionaria irreducible $\frac{p}{q}$, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal.

Halla todas las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

Si queremos hallar las raíces racionales del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ sabemos que existen a lo sumo 2 raíces. Para ello debemos hallar los divisores del término independiente y los del coeficiente principal.
Tenemos entonces

$$\textit{Divisores de } -3 = \{1, -1, 3, -3\} \textit{ y Divisores de } 2 = \{1, -1, 2, -2\}$$

Formamos ahora el conjunto de fracciones donde el numerador es divisor del término independiente y el denominador es divisor del coeficiente principal. Por lo tanto

$$\textit{Candidatos a raíces}=\left\{1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Haciendo cuentas tenemos que $P(-3) = 18 - 15 - 3 = 0$ y $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$, por lo que, por medio del Teorema del Resto deducimos que

$$\textit{Raíces de } P(x) = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$$

Estos resultados son conocidos como los **Teoremas de Gauss**[5] para hallar raíces de polinomios.

Factorización de polinomios

Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ es **irreducible** si no se puede escribir como producto de polinomios de la forma $P(x) = Q(x).R(x)$, donde $Q(x)$ y $R(x)$ tienen ambos grado menor que n o uno de ellos es mónico y el otro es una constante distinta de 1.

Entonces los polinomios irreducibles son los mónicos de grado 1 (lineales), y los de grado 2 mónicos que no tienen raíces reales.

Los polinomios que no son irreducibles, se los llama **reducibles**.

> El polinomio $P(x) = x^2 + 4$ es irreducible ya que como no tiene raíces en los reales, no puede escribirse como el producto de dos polinomios de grado 1.

> El polinomio $P(x) = x^2 - 4$ es reducible ya que
> $$x^2 - 4 = (x - 2).(x + 2).$$

> El polinomio $P(x) = 2x - 7$ es reducible ya que lo podemos factorizar como $P(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

Descomposición factorial

El proceso de **factorizar un polinomio** consiste en expresarlo como producto de otros polinomios.

[5]En honor al matemático, astrónomo y físico alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Si $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x$, tenemos dos factorizaciones de $P(x)$ distintas

- $P(x) = Q(x).R(x)$, donde $Q(x) = 2x^2 + 4$ y $R(x) = x^2 - 3x$.
- $P(x) = S(x).T(x)$, donde $S(x) = 2x$ y $T(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

Sin embargo, cuando hablamos de la **descomposición factorial** de un polinomio $P(x)$ nos referimos a la factorización de $P(x)$ en la cual todos sus factores son polinomios irreducibles o polinomios de grado 0 (una constante).

En el ejemplo anterior, la descomposición factorial de $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x$ es

$$P(x) = \underbrace{2}_{Constante} .\underbrace{(x^2 + 2).(x - 3).x}_{\substack{Polinomios \\ irreducibles}}$$

Para hallar esta descomposición se pueden utilizar distintos procedimientos. Repasaremos algunos que nos serán útiles.

Factor común

Cuando hay un factor que está repetido en todos los términos de un polinomio podemos sacarlo como factor común.

Por ejemplo, si $P(x) = -3x^5 + 12x^4 - 15x^3$, podemos ver que el factor $-3x^3$ está en los tres términos de polinomio, por lo que podemos sacarlo como factor común y obtenemos

$$P(x) = -3x^3(x^2 - 4x + 5)$$

También podríamos considerar que el factor que es común en los tres términos del polinomio es $3x^3$, por lo que obtenemos:

$$P(x) = 3x^3(-x^2 + 4x - 5).$$

Actividades

52. Reconoce el factor que se repite en los términos de los siguientes polinomios y extráelo como factor común
    a) $P(x) = x^6 + 11x^4 - 2x^2$
    b) $Q(x) = -4x^3 - 2x^2$
    c) $R(x) = 14x^5 - 7x^3 + 21x$

Trinomio cuadrado perfecto

Si recordamos que $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ podremos factorizar muchas expresiones que provengan de un trinomio cuadrado perfecto.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 9$, podemos reconocer que es un caso particular de trinomio cuadrado perfecto, cuando $a = -3$. Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x - 3)^2,$$

donde $x - 3$ es un polinomio mónico irreducible, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

Actividades

53. Escribe la descomposición factorial de los siguientes polinomios
    a) $P(x) = x^2 + 12x + 36$
    b) $Q(x) = 2x^2 - 8x + 8$
    c) $R(x) = x^2 - 2x + 1$
    d) $S(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

Diferencia de cuadrados

Si recordamos que $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, podremos factorizar muchas otras expresiones.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 25$, podemos reconocer que es un caso particular de diferencia de cuadrados, cuando $a = 5$. Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x-5)(x+5),$$

donde $(x-5)$ y $(x+5)$ son polinomios mónicos irreducibles, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

> Si $P(x) = x^2 - 2$, podemos notar que $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, y entonces obtenemos que
> $$P(x) = x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right).\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Actividades

54. Factoriza los siguientes polinomios
    a) $P(x) = x^2 - 49$
    b) $Q(x) = 2x^2 - 32$
    c) $R(x) = x^4 - 16$
    d) $S(x) = x^2 - 10$

Factorización de polinomios de grado 2

Recordemos que los polinomios de grado 2 son aquellos de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$.

En los casos anteriores repasamos descomposiciones factoriales para algunos casos particulares de polinomios de grado 2. Y además vimos que algunos polinomios de grado 2 son irreducibles.

¿Cómo hacemos para descomponer los polinomios de grado 2 que son reducibles pero que no provienen de un trinomio cuadrado perfecto ni de una diferencia de cuadrados?

Si utilizamos el Teorema del Resto, sabemos que si un número a es raíz de $P(x)$, entonces el polinomio $x - a$ tiene que dividir a $P(x)$, es decir, que será uno de sus factores en la descomposición factorial.

En el caso de los polinomios de grado 2, vimos que la fórmula de Bhaskara nos permite encontrar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que sabemos qué términos estarán en la descomposición factorial del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Es recomendable que antes de tratar de resolver la ecuación cuadrática por Bhaskara comprobemos si tiene soluciones (y cuántas) por medio del discriminante.

> Si $P(x) = x^2 + 5x + 6$, tenemos que $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$ y entonces podemos hallar las dos raíces del polinomio utilizando la fórmula de Bhaskara:
> $$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1}$$
> por lo que las raíces son $x_1 = \frac{-5+\sqrt{25-24}}{2} = -2$ y $x_2 = \frac{-5-\sqrt{25-24}}{2} = -3$.
> Luego, sabemos que los polinomios $x + 2$ y $x + 3$ son factores del polinomio $P(x)$, por lo que
> $$P(x) = (x + 2)(x + 3).$$

> Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, tenemos que $\Delta = (-2)^2 - 4.3.1 = -8 < 0$ por lo que la ecuación no tiene raíces reales y el polinomio es irreducible.

Este método nos permite hallar polinomios mónicos irreducibles que son factores en la descomposición factorial del polinomio, pero no nos da el coeficiente principal. Al escribir la descomposición factorial no debemos olvidarnos de escribir ese coeficiente.

> Si $Q(x) = 2x^2 + 10x + 12$, cuando aplicamos la fórmula de Bhaskara vamos a encontrar las mismas raíces que con $P(x) = x^2 + 5x + 6$. Esto es porque $x + 2$ y $x + 3$ son también factores del polinomio $Q(x)$. Sin embargo, la descomposición factorial de $Q(x)$ es
> $$Q(x) = 2(x + 2)(x + 3).$$

Actividades

55. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios
    a) $P(x) = x^2 + 2x - 35$
    b) $Q(x) = 2x^2 - 5x + 8$
    c) $R(x) = -x^2 - 7x - 12$
    d) $S(x) = -2x^2 + 18x + 20$

Factorización conociendo una raíz

Del mismo modo que en el caso anterior pudimos descomponer polinomios de grado 2 conociendo sus raíces, si tenemos un polinomio $P(x)$ del cual conocemos una raíz a, sabemos que el polinomio $x - a$ tiene que dividir a $P(x)$, es decir, que será uno de sus factores en la factorización.

Por ejemplo, si $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y sabemos que 3 es raíz del polinomio, podemos dividir $P(x)$ por $x - 3$ (utilizando Ruffini o la división tradicional) para obtener

$$P(x) = (x-3)(x^2 - x - 2)$$

Si ahora factorizamos el polinomio $x^2 - x - 2$ hallando las raíces con la fórmula de Bhaskara, obtenemos la siguiente descomposición del polinomio

$$P(x) = (x-3)(x+1)(x-2).$$

Del mismo modo que para los polinomios de grado 2, debemos considerar el coeficiente principal al factorizar polinomios que no sean mónicos.

Actividades

56. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios sabiendo que $x = -2$ es raíz de todos ellos
    a) $P(x) = x^3 + 7\,x^2 + 14x + 8$
    b) $Q(x) \ = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
    c) $R(x) = -2x^3 - 8x^2 - 10x - 4$
    d) $S(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$

Ya hemos visto los diferentes casos de factorización por separado, pero en general, podemos combinar los distintos métodos que hemos visto para hallar la descomposición factorial de un polinomio.

Sabiendo que el polinomio $P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 30\,x^3 - 18x^2 + 27x$ es divisible por $x^2 + 1$ halla su descomposición factorial.

Como del polinomio

$$P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 30\,x^3 - 18x^2 + 27x$$

sabemos que $x^2 + 1$ divide lo divide, podemos hacer la división tradicional para obtener

$$P(x) = (3x^3 - 18x^2 + 27x)(x^2 + 1).$$

En el primer factor podemos observar que se puede extraer $3x$ como factor común, y así obtenemos $P(x) = 3x(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 1)$.

Pero ahora podemos reconocer que $x^2 - 6x + 9$ es el desarrollo de $(x-3)^2$ (si no lo reconociéramos podemos factorizar utilizando la fórmula de Bhaskara). Y ahora tenemos el siguiente desarrollo del polinomio

$$P(x) = 3x(x-3)^2(x^2+1),$$

que nos da la descomposición factorial de $P(x)$.

Actividades

57. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:
    a) $P(x) = -7x^3 + 14\,x^2 - 7x$

b) $Q(x) = 2x^5 - 18x^3$
c) $R(x) = -x^2 - 3x - 2$
d) $S(x) = 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 3x + 6$, donde -2 es raíz de $S(x)$.
e) $T(x) = 4x^3 + 28x^2 + 60x + 36$, donde -1 es raíz de $T(x)$.

Multiplicidad de una raíz

Observemos que en el ejemplo anterior, la factorización del polinomio

$$P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 30\,x^3 - 18x^2 + 27x$$

resulta ser $P(x) = 3x(x-3)^2(x^2+1)$.

En este caso se puede observar que la raíz $x = 3$ aparece dos veces, por lo que diremos que 3 es una **raíz doble** del polinomio $P(x)$. Además, el factor $x^2 + 1$ es de grado 2, pero no tiene raíces.

Esto motiva la siguiente definición: Un número a se dice una **raíz de multiplicidad k** de un polinomio $P(x)$ si existe un polinomio $S(x)$ tal que $P(x) = (x-a)^k . S(x)$.

> El polinomio $P(x) = x^2(x-1).(x+3)^4$ tiene al 0 como raíz de multiplicidad 2 (o raíz doble), al 1 como raíz de multiplicidad 1 (o raíz simple) y al -3 como raíz de multiplicidad 4 (raíz cuádruple).

Actividades

58. Halla la multiplicidad de cada una de las raíces de los siguientes polinomios utilizando las factorizaciones obtenidas en el ejercicio anterior.
a) $P(x) = -7x^3 + 14\,x^2 - 7x$
b) $Q(x) = 2x^5 - 18x^3$
c) $R(x) = -x^2 - 3x - 2$
d) $S(x) = 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 3x + 6$
e) $T(x) = 4x^3 + 28x^2 + 60x + 36$

Aplicación: construcción de polinomios

Utilizando la descomposición factorial, es posible hallar polinomios que cumplan determinadas condiciones.

Halla un polinomio de grado 4, mónico, que tenga a -3 y 7 como únicas raíces. ¿Es único?

En ese caso, sabemos que los factores $x+3$ y $x-7$ deben estar en la descomposición factorial del polinomio y que 1 es el coeficiente principal. Además, como no queremos que el polinomio tenga otras raíces, no puede aparecer otro coeficiente de la forma $x-a$, con a distinto de -3 y 7. Entonces, podríamos proponer el siguiente polinomio:

$$P_1(x) = (x+3)(x-7)(x^2+5),$$

Que cumple todas las condiciones pedidas (observar que el factor $x^2 + 5$ es irreducible y no tiene raíces reales).
Sin embargo, esa no es la única posibilidad, podríamos haber propuesto también un polinomio de la forma

$$P_2(x) = (x+3)^2(x-7)^2,$$

entre otras opciones.

Hallar un polinomio $P(x)$ de grado 4, con coeficiente principal 2 tal que $x^2 + 1$ es uno de sus factores, -2 es una raíz, y tal que $P(0) = -4$. ¿Es único?

Sabemos que el polinomio debe ser de la forma

$$P(x) = 2(x^2+1)(x+2)Q(x),$$

Pero el polinomio $Q(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, ya que el polinomio $P(x)$ es de grado 4 y mónico, ya que el coeficiente principal debe ser 2. Entonces, $Q(x) = x - a$, para algún valor real de a.
Pero si evaluamos $P(0)$, tenemos:

$$P(0) = 2(0^2+1)(0+2)(0-a) = 2.2.(-a) = -4a$$

Y queremos que se cumpla $P(0) = -4$, por lo que debemos tener que $-4a = -4$, es decir, que $a = 1$.
Por lo tanto, el polinomio $P(x)$ debe ser

$$P(x) = 2(x^2+1)(x+2)(x-1).$$

Observemos que en este caso hay un único polinomio que cumple estas condiciones.

Actividades

59.

a) Halla un polinomio mónico $P(x)$de grado 3 tal que $P(2) = 0$ y $P(0) = 4$. ¿Es único?

b) Halla un polinomio $Q(x)$ de grado 4 tal que 1 y -1 sean raíces de $Q(x)$ y $x^2 + 3$ sea un factor del polinomio. ¿Es único?

c) Halla un polinomio $R(x)$ de grado 2, con coeficiente principal -1, tal que -2 sea raíz de $R(x)$, y $R(1) = -6$. ¿Es único?

d) $S(x)$ tiene grado 5, es divisible por $(x^2 + 1)$ y $(x - 3)$, además $S\,(-1) = S(2) = 0$ y al dividirlo por $(x + 2)$ da resto 100.

e) $T(x)$ tiene grado 3, es divisible por $(x^2 - 4)$, es mónico, y satisface que $T(0) = 8$.

f) $V(x)$ tiene grado 4, es mónico y tiene como raíz a -1, es divisible por $(x^2 + x - 2)$ y al dividirlo por x da resto 4.

Fracciones algebraicas

La división de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde $Q(x) \neq 0$, se puede representar como una fracción, que llamaremos **fracción algebraica**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Por ejemplo, si $P(x) = x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, tenemos la siguiente fracción algebraica

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

Pero esta expresión es válida siempre que el denominador no valga 0. Es decir, los valores tales que $Q(x) = 0$ (las raíces de $Q(x)$) son valores que tenemos que eliminar del conjunto de validez de la fracción algebraica.

En este caso, $x^2 - 4x + 3$ se anula si $x = 1$ y si $x = 3$, por lo tanto, el conjunto de validez (que abreviaremos C.V.) será:

$$C.V. = \mathbb{R} - \{1,3\}.$$

Una herramienta útil para hallar el conjunto de validez es tener la descomposición factorial del polinomio que está en el denominador.

Por otro lado, podemos factorizar el numerador y denominador de la fracción algebraica para obtener otra expresión de la misma

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

Como hay un factor que se repite en el numerador y el denominador, podemos simplificar esta expresión para hallar una **fracción algebraica equivalente**

$$\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

Estas expresiones serán equivalentes para todo valor de x que esté en el conjunto de validez de la fracción. En el caso en que no se puedan realizar más simplificaciones, diremos que está en su forma **irreducible**.

El conjunto de validez siempre debe ser hallado antes de realizar simplificaciones en la fracción algebraica.

Actividades

60. Halla el conjunto de validez de las siguientes fracciones algebraicas. En los casos en que sea posible, halla una fracción algebraica equivalente:

a) $\frac{-7x^3+14\,x^2-7x}{x^3-4x}$

b) $\frac{-3x^4+3}{x^2-x-2}$

c) $\frac{x^2+5x+6}{x^3+3x}$

d) $\frac{x^4+3x^2+2}{x^2-10x+25}$

61. Halla una fracción algebraica equivalente a $\frac{x^3-x^2}{(x+2)}$ con denominador x^3-4x.

62. ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{x^2+5x-14}{x^2+6x+9}$ y $\frac{x^3+4x^2-19x+14}{x^3+5x^2+3x-9}$? ¿En qué conjunto?

Operaciones con fracciones algebraicas

Del mismo modo en que operamos con fracciones numéricas, podemos sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. Repasaremos estas operaciones y veremos qué debemos considerar al realizarlas.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas necesitamos que ambas tengan un denominador en común. Esto podemos hacerlo de modo análogo a lo que hicimos con las fracciones numéricas, calculando el m.c.m. de los denominadores. Una vez que las dos fracciones tienen el mismo denominador, la operación se realiza en los numeradores

$$\frac{P(x)}{R(x)}+\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{P(x)+Q(x)}{R(x)}$$

$$\frac{P(x)}{R(x)}-\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{P(x)-Q(x)}{R(x)}$$

Realiza la siguiente operación $\frac{x^2+5x}{x^2+6x+9}+\frac{4}{2x^2+4x-6}$

Primero debemos hallar el m.c.m. de los polinomios $P(x)=x^2+6x+9$ *y* $Q(x)=2x^2+4x-6$. *Utilizando la fórmula de Bhaskara podemos factorizar ambos polinomios para obtener*

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$2x^2+4x-6=2(x+3)(x-1)$$

En ambos casos se repite el factor $x+3$, *por lo que en m.c.m. de* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *es*

$$2(x+3)^2(x-1).$$

Entonces, para realizar la suma $\frac{x^2+5x}{x^2+6x+9}+\frac{4}{2x^2+4x-6}$ *escribimos las fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos de modo tal que los denominadores sean* $2(x+3)^2(x-1)$

$$\frac{(x^2+5x)2(x-1)}{2(x+3)^2(x-1)}+\frac{4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}$$

Y en este caso podemos sumar directamente los numeradores y dejar el m.c.m. de los denominadores como denominador

$$\frac{2(x^2+5x)(x-1)}{2(x+3)^2(x-1)}+\frac{4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}=\frac{2(x^2+5x)(x-1)+4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}$$

$$=\frac{2x^3+8x^2-6x+12}{2(x+3)^2(x-1)}$$

El conjunto de validez de esta suma de fracciones algebraicas es

$$C.V.=\mathbb{R}-\{1,-3\}.$$

Actividades

63. Halla el m.c.m. de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en los siguientes casos

a) $P(x)=(x+2)(x-3)^4$ y $Q(x)=(x+2)^3(x-3)^2x$.

b) $P(x)=2x^2-8x+8$ y $Q(x)=-x^2+4$.

c) $P(x)=x^3$ y $Q(x)=x^5-7x^4$.

64. Realiza las siguientes operaciones y escribe el conjunto de validez

a) $\frac{x^2-3x-28}{x^3-7x^2}+\frac{x}{x^2-16}$

b) $\frac{x+7}{x^2-7x+12}-\frac{3x+12}{x^2-16}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}+\frac{3}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{4x+2}{2x^2-7x-4}-\frac{6}{3x-12}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas que tiene como numerador el producto de sus numeradores y como denominador el producto de sus denominadores. En símbolos tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

Donde el conjunto de validez estará dado por todos los números reales que no anulen el denominador $Q(x).S(x)$. Una vez que hallamos el conjunto de validez, podríamos simplificar para hallar alguna fracción algebraica equivalente.

Realiza la siguiente operación

$$\frac{x^2-x-6}{x}.\frac{5x-1}{2x-6}$$

Tenemos que

$$\frac{x^2-x-6}{x}.\frac{5x-1}{2x-6}=\frac{(x^2-x-6)(5x-1)}{x(2x-6)}$$

donde el conjunto de validez es $C.V.=\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Ahora, podemos factorizar la fracción algebraica para hallar otra equivalente

$$\frac{(x^2-x-6)(5x-1)}{x(2x-6)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{2x\cancel{(x-3)}}=\frac{(x+2)5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{2x}$$

En este caso se puede observar que su hubiéramos buscado el conjunto de validez una vez que la fracción estaba simplificada, éste hubiera sido erróneo, ya que el 3 no debe estar en el conjunto.

Actividades

65. Realiza las siguientes operaciones y escribe el conjunto de validez:

a) $\frac{x^2-3x-28}{x^3-7x^2}\cdot\frac{x}{x^2-16}$

b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\cdot\frac{x-3}{x^2-4x+3}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{2x}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{x^2+8x+16}{3x^2+48}\cdot\frac{5x+20}{3x^2-24x+48}$

División de fracciones algebraicas

Para dividir dos fracciones algebraicas multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda. En símbolos tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{S(x)}{R(x)}=\frac{P(x).S(x)}{Q(x).R(x)}$$

Para hallar el conjunto de validez, no solamente debemos considerar los números que anulan los denominadores $Q(x)$ y $S(x)$ sino también los que anulan al numerador $R(x)$, ya que al invertir la segunda fracción ese numerador pasará a ser un denominador.

Realizar la siguiente operación

$$\frac{x^2+3x-4}{x+5}:\frac{x}{x+2}$$

Sabemos que el conjunto de validez será

$$C.V.=\mathbb{R}-\{-5,0,-2\},$$

y para efectuar la división debemos invertir la segunda fracción y luego multiplicar, por lo que queda

$$\frac{x^2+3x-4}{x+5}:\frac{x}{x+2}=\frac{x^2+3x-4}{x+5}.\frac{x+2}{x}=\frac{(x^2+3x-4)(x+2)}{(x+5)x}$$

Actividades

66. Realiza las siguientes operaciones y escribe el conjunto de validez

a) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+4x} : \frac{3}{4x}$

b) $\frac{x^2-4}{2x^2+8x+8} : \frac{x^3+x^2}{2x+2}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1} : \frac{x}{x^2-1}$

Fracción algebraica inversa

Si tenemos una fracción algebraica de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios distintos de 0, se define la fracción algebraica inversa como

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1} = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

En este caso tenemos que sacar del conjunto de validez todos los valores que anulan $P(x)$ y los que anulan a $Q(x)$.

Calcula

$$\left(\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-1}\right)^{-1}$$

Tenemos que

$$\left(\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-1}\right)^{-1} = \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x}$$

Como las factorizaciones del numerador y denominador son

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3-4x^2+4x = x(x-2)^2$$

Que tienen como raíces los números 1, -1, 0 y 2, entonces el conjunto de validez es

$$C.V. = \mathbb{R} - \{1,-1,0,2\}.$$

Actividades

67. Halla la fracción inversa en los siguientes casos e indica el conjunto de validez

a) $\frac{x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2+12x+36}{x^2-4x-5}$

c) $\frac{3}{x^3+3x^2+3x+1}$

Ecuaciones fraccionarias

Una **ecuación fraccionaria** es una ecuación donde los términos son fracciones algebraicas.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{x^2-x}{x^2-1}=0$ es una ecuación fraccionaria.

El conjunto de validez de la ecuación anterior es

$$C.V.=\mathbb{R}-\{1,-1\}.$$

Nuestro objetivo será resolver la ecuación. Para esto, debemos buscar valores que sean solución de $x^2-x=0$, es decir, en los cuales el numerador de la ecuación tome el valor 0. Si factorizamos el numerador, es sencillo hallar esos valores $x^2-x=x(x-1)=0$ si $x=0$ o $x=1$. Sin embargo, $x=1$ no puede ser solución de la ecuación, porque $1\notin C.V.$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \leftrightarrow P(x)=0$$

Por lo tanto, el conjunto solución será

$$S=\{0\}.$$

En algunos casos tendremos que realizar algunas operaciones para poder hallar la solución.

Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación fraccionaria

$$\frac{-x-6}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=0$$

Sabemos que el conjunto de validez es

$$C.V.=\mathbb{R}-\{2,-2\},$$

Pero para hallar el conjunto solución debemos primero realizar la suma de las fracciones

$$\frac{-x-6}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{-x-6+x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-x-6+x^2+2x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+x-6}{(x-2)(x+2)}=0$$

Y ahora sí alcanza con igualar el numerador a 0 para obtener las soluciones

$$x^2+x-6=(x-3)(x+2)=0$$

Pero como $-2\notin C.V.$ tenemos que el conjunto solución es

$$S=\{3\}.$$

Veamos un ejemplo más.

Resuelve la siguiente ecuación fraccionaria

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}:\frac{2x+6}{2x}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Si factorizamos obtenemos la ecuación

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} : \frac{2(x+3)}{2x} + \frac{1}{x+1} = 0,$$

Lo cual nos permite hallar el conjunto de validez

$$C.V. = \mathbb{R} - \{3, -3, 0, -1\}.$$

Ahora, podemos simplificar

$$\frac{\cancel{(x-3)(x+3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}} : \frac{\cancel{2(x+3)}}{\cancel{2}x} + \frac{1}{x+1} = 0,$$

Para obtener la ecuación

$$\frac{1}{x-3} : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0.$$

Si separamos en términos, sabemos que debemos realizar primero la división

$$\frac{1}{x-3}.x + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+1} = 0.$$

Ahora realizamos la suma, usando como m.c.m. de los denominadores el polinomio $(x-3)(x+1)$*, lo que nos da por resultado*

$$\frac{(x+1).x + (x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x^2 + x + (x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-3)(x+1)} = 0.$$

Para resolver esta última ecuación debemos hallar los valores que sean raíces del polinomio $x^2 + 2x - 3$*. Utilizando la fórmula de Bhaskara podemos hallar los valores* $x = 1$ *y* $x = -3$*. Pero como* $-3 \notin C.V$*, tenemos que el conjunto solución es*

$$S = \{1\}.$$

Actividades

68. Halla el conjunto de validez y el conjunto solución de las siguientes ecuaciones fraccionarias

a) $\frac{x^2}{2x^2+5x-3} + \frac{x^2-\frac{1}{4}}{4x^2-4x+1} : \frac{2x^2+x}{4x^2} = 0$

b) $\frac{x^2-\frac{1}{9}}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}} : \frac{3x^2+x}{6x^2} + \frac{2x^2}{3x-1} = 0$

c) $-\frac{8}{x^2+5x} + \frac{3x^2+6x}{x^4+4x^3+4x^2} : \frac{x+5}{x^2+3x+2} + \frac{x+1}{x+5} = 0$

d) $\frac{2x-1}{2x^2+x-1} + \frac{6}{x^2-1} = \frac{2}{x^2+x}$

e) $\frac{3x^2-15x+18}{x^2+x-6} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{30-10x}{x^2-9}$

f) $\frac{1}{x+1} + \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} : \frac{3x+9}{3x} = 0$

Actividades de repaso del Capítulo 2

1. Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones
   a) $x^5 + 4x^3 = x^3 + 4x$
   b) $2x^3 = 2x^5 - 5x^4 - x^3$
   c) $(x+3)(x^3 - 3x^2 - 3x) = x^2 + 3x$
2. Encuentra el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la ecuación
$$x^2 + 2(a+3)x + 6(a+2) + 1 = 0$$
   tenga una única solución real.
3. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 + (2a-4)x$ es divisible por $x+1$.
   a) Determina el polinomio.
   b) Encuentra todas sus raíces reales.
   c) Escribe su descomposición factorial en $\mathbb{R}[x]$.
4. Dado $P(x) = 2Kx^{121} + 9Kx^{99} - (K-1)x^{70} + 9x^{48} + 5Kx^{34} + 4$, determina el valor de K de modo que $P(x)$ sea divisible por $x+1$.
5. Si se sabe que al dividir $P(x) = x^2 + 2x - 1$ por $x - c$ da como resto 2, ¿cuáles son los posibles valores de c? Justifica.
6. Construye un polinomio $P(x)$ de grado 4 que tenga como raíces a $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$, que sea divisible por $C(x) = 3x + 1$ y que al dividirlo por $D(x) = x$ de cómo resto -28. Escribe su descomposición factorial.
7.
   a) Escribe un polinomio $P(x)$ de grado 3, que tenga a $1/3$ y a -4 como raíces y admita al polinomio $x - 4$ como divisor. ¿Es único?
   b) ¿Cuál de los polinomios que satisfacen las condiciones dadas en a) verifica además que al dividirlo por x el resto es 2?
8. Se quiere pintar una rampa de x metros de altura, una longitud de x metros, con 7 metros de ancho y tapas en los costados.
   a) Determina la expresión algebraica que representa el área total a pintar. ¿Dicha expresión es un polinomio? Justifica.
   b) Si se desea rellenar con cemento, determina la expresión algebraica que representa el volumen a rellenar. ¿Dicha expresión es un polinomio? Justifica.
   c) De ser un polinomio lo obtenido en a), halla su descomposición factorial.
9. La diferencia entre los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es igual a 64. ¿Cuáles son esos números?
10. Dos bicicletas parten simultáneamente de un mismo punto, una hacia el sur y otra hacia el este. Al cabo de unos instantes, la distancia entre ellas es de 100 metros. ¿Cuánto recorrió cada bicicleta si se sabe que la que se dirige al sur hizo 20 metros más que la otra?
11. Expresa el área de un triángulo equilátero en términos de su altura.

Consejos a tener en cuenta para realizar ejercicios

Al terminar el primer módulo y antes de rendir el parcial, es bueno que consideres las siguientes sugerencias para resolver ejercicios:

- ✓ No aproximar: Si el enunciado no lo pide, no aproximes. Deja el valor exacto, por más que esté expresado como una raíz. Otro ejemplo es: π vale π y no 3,14 ó 3,1415.
- ✓ Definir variables: Siempre que utilices una letra para representar alguna variable desconocida, hay que definirla bien. Ejemplo: P= Pedro, no nos da información de si estamos averiguando su edad, su peso, su altura, su DNI, etc… Define por ejemplo P=Edad actual de Pedro, o F=cantidad de figuritas que tiene Juan.
- ✓ Dar respuesta: Siempre que en el enunciado haya una pregunta, asegúrate de dar una respuesta. Por ejemplo: El valor de k buscado es 3, La edad de la madre es 45 años, El perímetro mide 35 cm., etc. También debes tener en cuenta si la respuesta debe llevar unidades de medida.
- ✓ Esquematizar la situación: Si el problema es geométrico, siempre te conviene acompañar los cálculos con un gráfico (no importa si es exacto, lo importante es que te dé idea de lo que tienes que plantear), en el que figuren los datos que te dan, y los datos que tienes que averiguar, o sea, las incógnitas.
- ✓ Justificar: Al realizar cálculos muchas veces utilizas propiedades o teoremas que debes nombrar para justificar los pasos realizados. Por ejemplo, por el Teorema del Resto tenemos que…o por el Algoritmo de la división sabemos que… etc.
- ✓ Definir los conjuntos: En el caso de usar números pares (por ejemplo), es necesario que aclares que $c \in \mathbb{Z}$ si utilizas que $n = 2.c$, si no, no estarías definiendo el conjunto correctamente.
- ✓ Verdaderos y Falsos: Cuando se pide que decidas por V o F sobre una afirmación y justifiques tu elección, deberás utilizar contraejemplos para demostrar que algo es falso, pero no alcanza un ejemplo para demostrar que algo es verdadero. Se pueden hacer algunos ejemplos para decidir si alguna afirmación es verdadera o no, pero en caso de ser verdadera, es necesario probar de forma analítica, utilizando por ejemplo las propiedades.