Matemática B

Libro de Cátedra

2024

¡Bienvenidos!

Matemática B es una materia del segundo semestre del primer año de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Estudiarán en esta asignatura los conceptos y métodos más importantes del *Cálculo Integral y Vectorial* para funciones a valores reales de una y varias variables, algunas aplicaciones a problemas geométricos y físicos, además de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y series numéricas.

En Matemática A los problemas de la *recta tangente* y de la *velocidad* sirvieron para introducir el concepto de *derivada* que es la idea central del *Cálculo Diferencial*. En Matemática B los problemas del *área* y del *desplazamiento* servirán para introducir *la integral definida* y encontrar luego su conexión con la *derivada*. En Matemática C estudiarán otra importante rama de la Matemática (el *Álgebra lineal*) pero también continuarán el estudio de las *Ecuaciones Diferenciales* y el de las *Series Numéricas* que habrán comenzado en esta materia.

Las clases de Matemática B son de carácter teórico-práctico. Entendemos el aula como un espacio de estudio en el que es fundamental el quehacer de Ustedes, los alumnos, interactuando y colaborando con sus pares, y guiados y supervisados por sus docentes.

Aspiramos a que el tránsito por Matemática B sea para Ustedes significativo, no sólo para lo que tiene que ver estrictamente con la formación matemática, sino también para el desarrollo de estructuras de pensamiento y habilidades útiles y necesarias en sus carreras.

Compilador y autor: **Dra. Viviana Angélica Costa**

Este Guía de Cátedra es una nueva versión que recopila y modifica las primeras ediciones realizadas por los profesores **Viviana Edith Gómez, María Cristina Vachino y Juan Pablo Acosta**, que a lo largo de los años han ido elaborando en distintas etapas desde el año 2002 cuando se crea la asignatura Matemática B a raíz de un cambio de plan de estudios en las carreras de ingeniería.

En las distintas versiones, además han colaborado y realizado aportes en el texto, los profesores: Diego Vallejo, Rossana Di Domenicantonio, Delicia Tisera y Liliana Carboni.

Agradecimientos: a todos los docentes de la cátedra de Matemática B que han contribuido al mejoramiento de estas Guías teórico-prácticas, por sus aportes y correcciones; a los profesores de Física I y de Física II, Patricia Torroba, Eugenio Devece y Roberto Alonso, por sus contribuciones en los temas vinculados con las aplicaciones físicas del Cálculo Integral y del Cálculo Vectorial; a la profesora Ana Scarabino, Titular de la cátedra de Mecánica de los Fluidos, por su aportes en temas de campos vectoriales; a Mercedes Trípoli por sus aportes en el tema de funciones pares, impares y periódicas y a Laura del Río por la elaboración del material desarrollado en GeoGebra para la Cátedra.

Contenidos Analíticos - Matemática B (F0302 y F1302)

- **Unidad temática I**: El problema del área debajo de la gráfica de una función. Integral definida: definición y propiedades. Teorema fundamental del cálculo integral. Teorema del valor medio para integrales. Integral indefinida. Propiedades. Métodos de integración: sustitución, integración por partes, integración de funciones racionales y de funciones trigonométricas. Aplicaciones de la integral definida: cálculo del área de una región del plano, volumen de un sólido de revolución, longitud de un arco de curva.

- **Unidad temática II**: Introducción a las ecuaciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: de variables separables, exactas, lineales. Existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial. Aplicaciones. Trayectorias ortogonales.

- **Unidad temática III**: Integral doble: definición, propiedades. Cálculo por medio de integrales iteradas. Regiones tipo I y tipo II. Aplicaciones de la integral doble: cálculo de volúmenes y áreas, cálculo de la masa y del centro de masa de una lámina. Integral triple: definición, propiedades. Cálculo por medio de integrales iteradas. Aplicaciones: cálculo de volumen, masa y centro de masa. Sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Cambio de variables: su aplicación en el cálculo de integrales.

- **Unidad temática IV**: Integrales impropias. Sucesiones y series numéricas. Series geométricas y telescópicas. El criterio de la integral, p-series. Los criterios de comparación y de la razón. Series alternantes. Convergencia absoluta y condicional. Criterio de Leibniz.

- **Unidad temática V**: Representación paramétrica de curvas en el plano y en el espacio. Operaciones y cálculo con funciones vectoriales. Longitud de arco de una curva, función longitud de arco, parámetro longitud de arco. Campos vectoriales. Rotor y divergencia de un campo vectorial, propiedades. Campo gradiente. Integral de línea de una función escalar. Cálculo en función del parámetro longitud de arco y en función de un parámetro cualquiera. Integral de línea de la componente tangencial de un campo vectorial. Trabajo. Teorema de Green: aplicaciones y consecuencias. Independencia del camino de la integral de línea. Campos conservativos.

- **Unidad temática VI**:Representación vectorial de superficies. Dirección normal y superficies orientables. Área de una superficie. Integral de una función escalar sobre una superficie. Integral de flujo. Teoremas de Stokes y Teorema de Gauss. Aplicaciones y consecuencias.

Bibliografía

- Larson R.E.,Hostetler R.P.y Edwards B.H., Cálculo, Vol I y II, McGraw Hill, 1999.
- Stewart J., Cálculo trascendentes tempranas, Thomson, México, 2000.
- Purcell E.J., Varberg D. y Ringdon S.E., Cálculo, Pearson, 2000.
- Smith R., Minton R., Cálculo, Vol I y II, McGraw Hill, 2000.
- Thomas y Finney, Cálculo , Vol I y II, Pearson, 1998.
- Edwards-Penney, Ecuaciones diferenciales, 4a. ed., Pearson, 2001.
- Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, 8a.ed., Thomson, 2006.

Libros de GeoGebra - Desarrollado por la Prof. Laura del Río.

https://www.geogebra.org/m/QfQMfsD3

https://www.geogebra.org/m/BkpUstj9

Material complementario de la Cátedra

https://n9.cl/bpc6o

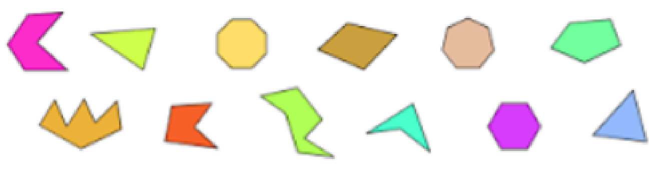
Índice general

Capítulo 1

Integral en una variable

El concepto de integral definida tuvo su origen en un problema geométrico: el cálculo del área de una región plana cuya frontera no está formada en su totalidad por segmentos rectilíneos. Es éste uno de los grandes problemas de la historia de la matemática pues, más allá de su importancia dentro de la propia disciplina, está relacionado con incontables aplicaciones.

Las figuras planas con bordes rectos se denominan en geometría *polígonos* (triángulos, rectángulos, trapecios, rombos, entre otras). Están compuestas por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano, y los puntos de unión entre los segmentos se llaman vértices.



Y sabemos que si una figura plana tiene bordes rectos, es posible calcular su área, particionando por ejemplo en triángulos, y sumar sus áreas, como se muestra en la figura siguiente.

En esta primera parte del curso estudiaremos como resolver, desde la matemática, el problema de calcular el **área de una figura plana** cualquiera sea.

Actividad

En cada una de las tres situaciones de la siguiente actividad nos referimos a un móvil que se desplaza sobre una recta. Observarán en cada caso la relación entre, el área de la región limitada por la gráfica de la *función velocidad* y el eje de las abscisas en un intervalo de tiempo dado, y el *desplazamiento* del móvil en ese intervalo. Entenderemos por desplazamiento a la distancia que existe entre la posición inicial y la final de un cuerpo en movimiento.

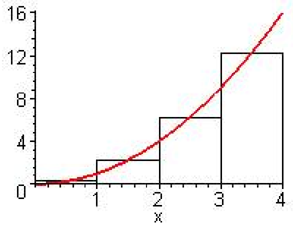
- Situación 1: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad es constante e igual a 80 km/h.
  - Calculen el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$ (t representa el tiempo y se supone expresado en horas).
  - Grafiquen la velocidad en el intervalo $[0, 4]$, colocando la variable independiente t en el eje de abscisas y $v(t)$ en el eje de ordenadas.
  - Comparen el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$ con el *área debajo de la gráfica* de la función velocidad en el intervalo $[0, 4]$.
- Situación 2: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad en el tiempo t es $v(t) = 20t$ (km/h) .
  - Calculen el desplazamiento en $[0, 1]$, en $[1, 2]$, en $[2, 3]$ y en $[3, 4]$.
  - Calculen el desplazamiento en $[0, 4]$.
  - Grafiquen la velocidad y comparen, en cada intervalo, el desplazamiento con el área debajo de la gráfica de *v(t).*
- Situación 3: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad en el tiempo t es $v(t) = t^2$ (km/h) .
  - ¿Cuántos kilómetros se desplaza el automóvil entre $t = 0$ y $t = 4$? .

- Grafiquen la velocidad. Señalen en el gráfico la región cuya área coincide (omitiendo unidades) con el desplazamiento en $[0,4]$. ¿Cómo calcularían el área señalada?

1.1. Área debajo de una gráfica

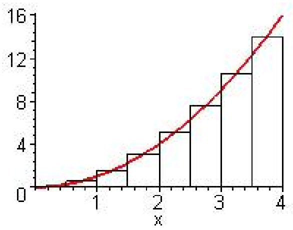
Para una función lineal o lineal a trozos, el cálculo del área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje x en un intervalo dado es fácil: basta con sumar áreas de rectángulos y triángulos. Pero, ¿cómo calculamos el área debajo de la gráfica de $v(t) = t^2$ en el intervalo $[0,4]$? Podemos *aproximar* el valor del área con la suma de las áreas de un número finito de rectángulos como en los siguientes ejemplos:

- Ejemplo 1: Dividamos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud 1. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\acute{A}rea \approx v(\tfrac{1}{2}) \cdot 1 + v(\tfrac{3}{2}) \cdot 1 + v(\tfrac{5}{2}) \cdot 1 + v(\tfrac{7}{2}) \cdot 1 = ...$$

- Ejemplo 2: Dividamos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\acute{A}rea \approx v(\tfrac{1}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{3}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{5}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{7}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + \\ v(\tfrac{9}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{11}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{13}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} + v(\tfrac{15}{4}) \cdot \tfrac{1}{2}$$

- Ejemplo 3: Si dividimos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{16}$ y repetimos el procedimiento... ¿cuántos términos debemos sumar?

  Para escribir la suma, en este caso, sería conveniente contar con una notación abreviada, y lo haremos usando la notación llamada sigma.

Notación sigma

La letra griega $\sum$ (sigma) es el símbolo que se utiliza para indicar de manera abreviada una suma de varios términos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

donde i es un índice que puede tomar valores naturales o enteros, en este caso toma los valores naturales desde 1 hasta n, y a_i es el término general de la sumatoria.

Propiedades de la notación sigma Las propiedades de la notación sigma, tienen validez por ser propiedades de la operación suma en el conjunto de los números reales. Algunas propiedades son:

- La *conmutatividad* y la *asociatividad* de la adición, hacen que el resultado de una serie (finita) de adiciones, no dependa del orden en el cual los términos son considerados.
- $\displaystyle\sum_{i=s}^{t} a_i + \sum_{i=s}^{t} b_i = \sum_{i=s}^{t} [a_i + b_i]$
- $\displaystyle\sum_{i=s}^{t} a_i - \sum_{i=s}^{t} b_i = \sum_{i=s}^{t} [a_i - b_i]$
- $\displaystyle\sum_{i=s}^{t} a_i = \sum_{i=s+p}^{t+p} a_{i-p}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{t} a_i = \sum_{i=1}^{t} a_i$
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} C = C \cdot (n - m + 1)$ donde C representa una constante
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} Ca_i = C\sum_{i=m}^{n} a_i$ donde C representa una constante

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (suma de los primeros n números naturales)
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (suma de los cuadrados de los primeros n números naturales)

Volviendo a al actividad y con esta notación la suma del ejemplo 1 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{2i-1}{2}\right)^2$$

La expresión $\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2$ es el término general de la sumatoria. Si se reemplaza en el término general el índice i sucesivamente por 1, 2, 3 y 4 intercalando el signo $+$, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

La suma del ejemplo 2 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{2}\left(\frac{2i-1}{4}\right)^2$$

¿Puedes dar una expresión que dependa de n para esta suma? Expresen ustedes la suma del ejemplo 3 usando la notación sigma, e intenten encontrar su suma en función de n.

Volviendo al problema que nos ocupa y al procedimiento seguido en los ejemplos, debemos decir que, para establecer la altura de los rectángulos, en vez de elegir el punto medio de cada uno de los subintervalos, podríamos haber elegido el extremo derecho, el extremo izquierdo o un punto cualquiera interior. También, los subintervalos con los que dividimos al intervalo $[0, 4]$ en cada ejemplo podrían haber tenido longitudes diferentes.

Considerando cada vez más rectángulos, con bases (todas) cada vez más pequeñas, esperamos tener una mejor aproximación para el área de la región. Cierto es que el procedimiento es tedioso.

- Para ayudarte con este procedimiento puedes usar la aplicación de **GeoGebra** y observar los valores que se obtienen de las sumas a medida que se aumenta la cantidad de rectángulos. ¿Estas sumas, convergen a un valor?

Hemos visto cómo podemos hallar de manera aproximada el área debajo de la gráfica de una función pero... ¿cuál es el valor exacto? ¿podemos calcularlo prescindiendo del procedimiento anterior? Encontraremos la respuesta a estas preguntas un poco más adelante.

1.2. Integral definida

Suma de Riemann

Se llama *Suma de Riemann* para una función f en el intervalo cerrado $[a, b]$ a lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

donde $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $|\mathcal{P}| = máx\,\{\Delta x_i\}$ es la *norma* de la partición$|\mathcal{P}|$ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definición de integral definida

Si para una cierta función f, existe el límite de la Suma de Riemann cuando n (cantidad de intervalos) tiende a infinito y la norma de la partición $|\mathcal{P}|$ tiende a cero y es independiente de los valores de $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, se dice que la función es *integrable* y se anota:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Advertir que, la integrabilidad, de una función es una propiedad local, es decir que depende del intervalo en el cuál se lo esté analizando. Además en general, para cualquier función dada, no es sencillo analizar su integrabilidad en un intervalo a partir de la definición, ya que habría que contar con una forma general de la suma de Riemann para luego a ello calcularle el límite, y en caso de existir, se obtendría el valor de la integral definida. Pero hay un resultado importante que arroja el siguiente teorema que soluciona algunos de los inconvenientes antes mencionados.

Teorema

Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *continua* en $[a,b]$ o es *continua a trozos* en $[a,b]$ (o sea, es continua en $[a,b]$ salvo en finitos puntos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en los que existen los límites laterales) entonces la función f **es integrable** en $[a,b]$ y su integral vale el número que resulta del límite de la suma de Riemann.

Este Teorema es fundamental, ya que nos asegura que toda función continua o continua a trozos, es integrable. Esto quiere decir que el límite de la suma de Reimann existe, y ese valor es el que se asigna a la integral definida, aunque aún no tengamos alguna otra estrategia para calcularlo. La demostración no la presentaremos aquí en este curso, pues requiere del conocimiento de una matemática más avanzada.

Ejemplo de funciones integrables, en cualquier intervalo cerrado de la recta real, son las funciones polinómicas: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, funciones escalonadas, función exponencial:e^x, seno: $sen(x)$ y coseno: $cos(x)$. ¿Y la composición de estas funciones, resultan ser funciones integrables? Si, pues la composición de funciones continuas, es una función continua, así por ejemplo: $cos(x^2+1)$, e^{x^2}, $(sen(x))^4$, son integrables.

Sin embargo, el teorema no asegura, por ejemplo que funciones como $f(x) = 1/x$ sea integrable en el intervalo $[0,1]$ ya que esta función no es continua en $x = 0$ donde presenta una asíntota vertical. Pero, si es integrable, en el intervalo $[1,2]$ o en el intervalo $[-3,-2]$, por ejemplo.

Propiedades de la integral definida

1. Se define $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

2. Si $a < b$ se define, $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3. **Linealidad de la integral:** Si f y g son funciones integrables en el intervalo y K es una constante $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$$

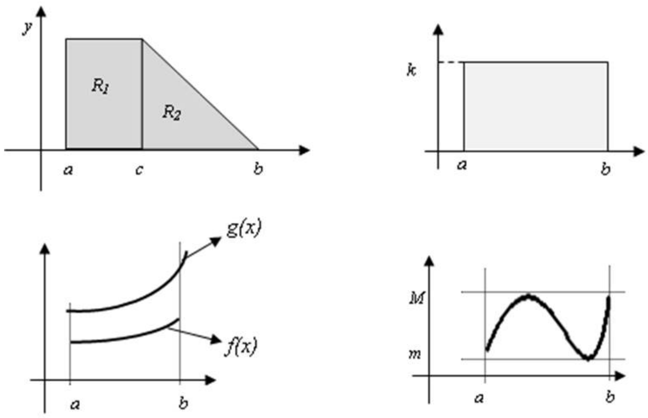
4. **Aditividad en el intervalo de integración:** Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. **Integral de una función constante:** Si $f(x) = C \ \forall x \in [a, b]$ con C constante entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

6. **Monotonía:** Si f y g son funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

7. **Acotamiento:** Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Las demostraciones de las propiedades anteriores se desarrollan a partir de la definición de la integral mediante las sumas de Riemann y a partir de las propiedades de la sumatoria. Algunas resultan bastante obvias cuando las funciones involucradas son continuas en el intervalo de integración como se aprecia en los siguientes gráficos:



Funciones pares, impares y periódicas

Los conceptos de paridad y de periodicidad de una función son importantes en carreras de ingeniería, ya que su conocimiento permite realizar cálculos de modos más sencillos e inferir características cualitativas de una función (como por ejemplo, de su derivada o integral, en caso de existir). Asimismo, las funciones periódicas son herramientas de modelización de fenómenos físicos que presentan un comportamiento ondulatorio, como vibraciones, ondas mecánicas, ondas acústicas, ondas gravitacionales, que son de estudio común en diversas especialidades de la ingeniería.

Definiciones

- ***f* es *par*** si para todo x en su dominio se cumple que $f(x) = f(-x)$.
- ***f* es *impar*** si para todo x en su dominio se cumple que $f(x) = -f(-x)$.
- ***f* es *periódica*** con *período* $T > 0$ si satisface que $f(x) = f(x+T)$ para todo x en su dominio. En tal caso también cumple $f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$, y en general $f(x+nT) = f(x)$ para $n = 0; 1; 2; ...$. Basta entonces conocer los valores de $f(x)$ en cualquier intervalo de longitud T para determinar su valor $f(x)$ en cualquier x del dominio. Al valor $1/T$ se lo denomina *frecuencia*.

Los ejemplos más comunes de funciones pares son las funciones polinómicas con potencias pares. Ejemplo de funciones impares son las funciones polinómicas con potencias impares. Ejemplos de funciones periódicas son las funciones trigonométricas, que en combinaciones adecuadas se emplean en el análisis armónico. Sin embargo existen otras, como por ejemplo, la función mantisa. También una función puede se par y periódica como es el *cos(x)*, o impar y periódica como es el *sen(x)* y la *tag(x)*.

La gráfica de las funciones pares presentan una simétrica respecto del eje de las ordenadas. La gráfica de una función impar, presenta simetría respecto al origen de coordenadas.

Algunas propiedades que cumplen las funciones pares, impares y periódicas, son:

1. Si f es **impar**, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
2. Si f es **par**, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

3. Si *f(x) es periódica*, entonces $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$, para a y b en el dominio de f.

Intenta probar y comprender algunas de estas propiedades mediante una gráfica y las definiciones.

Además, se verifican las siguientes propiedades, que no las estaremos demostrando:

- Toda función continua se puede descomponer en la suma de, una función par y de una impar.
- La única función que es tanto par e impar es la función nula.
- La suma de una función par y una impar no es ni par ni impar, a menos de que una de las funciones sea la nula.
- La suma de dos funciones pares es una función par y la suma de dos funciones impares es una función impar.
- El producto de dos funciones pares es una función par, de dos funciones impares es una función par, de una función par y una función impar es una función impar.
- Si una función es par y existe su derivada, ésta es impar y si una función es impar, su derivada de existir, es par. Además la integral de una función par es impar.
- La suma y producto de funciones periódicas de un mismo período es también periódica con el mismo período.
- Si una función es periódica y existe su derivada, ésta es también periódica.
- Podes visualizar algunas funciones pares e impares, y sus propiedades usando la aplicación de **GeoGebra.**

1.2.1. Ejercicios

Usando los conceptos de paridad, dar los valores de las integrales siguientes:

- $\int_{-a}^{a} x\cos(x)dx = ...$

- $\int_{-1}^{1}(x - sen(x)dx = ...$
- $\int_{-2}^{2}(x/exp(x^2))dx = ...$

Calcular, usando propiedades y conociendo que $\int_0^1 f(x)dx = 4$:

- $\int_0^1 3f(x)dx$
- $\int_0^1 (f(x) - 2)dx$
- $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en el caso que f sea par.

Calcular, usando propiedades y conociendo que $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ y que $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$:

- $\int_{-1}^{2}(3f(x) + g(x))dx$
- $\int_{-1}^{2}(f(x) - 2g(x) + 4)dx$

En cada caso dar cotas para la integral dada:

- $\int_0^{\pi/2} 3cos(x)dx$
- $\int_{-1}^{2} x^2dx$
- $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

1.3. Teorema del valor medio para integrales

Teorema del valor medio para integrales

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ existe un número c en ese intervalo tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Demostración: Siendo f continua en el intervalo $[a, b]$, existen x_m y x_M en ese intervalo tales que, $\forall x \in [a, b]$ es

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Entonces, por propiedad de la integral definida,

$$f(x_m)(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_M)(b - a)$$

y dividiendo por b-a resulta:

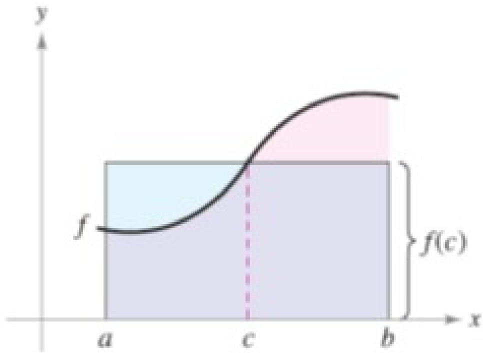
$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(x_M)$$

La continuidad de f permite ahora afirmar que, para algún c entre x_m y x_M (y por lo tanto en $[a,b]$) es $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$ y por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio

El caso particular de una función f no negativa en $[a,b]$ nos permite dar una interpretación geométrica del teorema:



Observar que desde el punto de vista geométrico, significa que siempre puede hallarse un rectángulo de base $b-a$ con área igual a la región bajo la gráfica de la función (suponiendo f con valores positivos), cuya altura queda determinada por el valor de $f(c)$ para c cierto punto del intervalo.

Valor promedio de f en un intervalo

Si f es una función integrable en $[a,b]$ se llama *valor promedio* de f en ese intervalo a:

$$f_P = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Además, el teorema anterior se podría enunciar: Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que el valor promedio de f en ese intervalo es igual a $f(c)$.

1.4. Función integral

Función integral

Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, podemos definir una nueva función g asignando a cada $x \in [a, b]$ la integral de f desde a hasta x.

O sea: $$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad , \quad si \;\; x \in [a, b]$$

Así definida la función g se llama *función integral de f en* $[a, b]$.

Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y es integrable en ese intervalo, entonces $g(x)$ es también una función continua. Se entiende intuitivamente que esto es cierto interpretando a $g(x)$ en términos de áreas de regiones. Formalmente lo podemos justificar recurriendo a la propiedad de acotamiento: Supongamos que $A \leq f(x) \leq B \;\; \forall x \in [a, b]$.

Si $a \leq x_0 < x_0 + h \leq b$ entonces $g(x_0 + h) - g(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

por lo tanto $A \,.\, h \leq [g(x_0 + h) - g(x_0)] \leq B \,.\, h$ y como $\lim\limits_{h \to 0^+} A.h = 0$ y $\lim\limits_{h \to 0^+} B.h = 0$ resulta $\lim\limits_{h \to 0^+} [g(x_0 + h) - g(x_0)] = 0$, o sea,

$$\lim_{h \to 0^+} g(x_0 + h) = g(x_0) \; para \; todo \; x_0 \in [a, b)$$

De la misma manera se demuestra que $\lim\limits_{h \to 0^-} g(x_0 + h) = g(x_0) \; \forall x_0 \in (a, b]$. Entonces $g(x)$ es continua.

Ejemplos: Calculemos la función integral para los siguientes casos sencillos y en los que mediante consideraciones geométricas podremos obtener el valor de la integral definida:

1) $f(x) = 4$ en el intervalo $[0, 1]$

$$g(x) = \int_0^x 4dt$$

Interpretando que la integral entre 0 y x bajo $g(x)$ en este caso se puede calcular como el área de un rectángulo de base x y altura 4, obtenemos que:

$$g(x) = 4x$$

en el intervalo $[0, 1]$.

2) $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$

$$g(x) = \int_0^x tdt$$

Interpretando que la integral planteada es el área de un triángulo de base x y altura x, obtenemos que:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

para x en $[0,1]$.

3) $f(x) = 2x + 1$ en el intervalo $[0,4]$ Calculen en este caso

$$g(x) = \int_0^x (2t+1)dt$$

Hallar la expresión de $g(x)$ interpretando que la integral calcula en este caso el área de una trapecio. ¿Qué obtienen?

Pregunta: ¿Encuentran alguna relación entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ halladas?

Estudiaremos luego la derivada de $g(x)$ (y ello nos conducirá nada menos que a resolver el problema del cálculo de la integral definida) pero antes les proponemos algunos ejercicios en relación a las definiciones y propiedades presentadas hasta el momento.

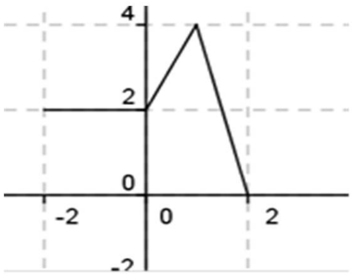
1.4.1. Ejercicios

1. Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,1]$. i) ¿Cuál de las dos funciones es mayor o igual que la otra en todos los x del intervalo $[0,1]$? ii) ¿Cuál es el signo de $\int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$? iii) ¿Qué representa esa diferencia?

2. Estudiar la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 4$ en el intervalo $[-2,3]$. i)¿Cuáles son los valores mínimo y máximo absolutos de f en ese intervalo? ii) ¿Qué cotas puede dar para $\int_{-2}^3 f(x)dx$?

3. Sea $f(x) = 3x + 2$, $x \in [2,5]$ y sea g la función integral de f en ese intervalo. i) Interpreten geométricamente $g(x)$ y hallen su expresión analítica.
   ii) ¿Es derivable la función g? Hallen $g'(x)$ y compárenla con $f(x)$.
   iii) Representar f y g en el mismo sistema de coordenadas.

4. Siendo g la función integral de la función f que muestra el siguiente gráfico , i)Evalúen $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$ y $g(2)$ .ii) Hallen la expresión analítica de la función g. iii) ¿Es derivable g? ¿Cuál es su derivada?



- Podes visualizar en esta aplicación un ejemplo de función integral con **GeoGebra.**

1.5. Concepto de primitiva o antiderivada

Concepto de primitiva o antiderivada

Si para todo x de un intervalo de números reales I es $F'(x) = f(x)$, decimos que F es una *primitiva* de f en ese intervalo.

Por ejemplo, $F(x) = sen(x)$ es una primitiva de $f(x) = cos(x)$ en cualquier intervalo I de números reales. Notar, también que $F(x) = sen(x) + 1$ es una primitiva, y es más, $F(x) = sen(x) + C$ es primitiva con C constante cualquiera. **Con lo cual la primitiva de una función no es única, son infinitas, y dos cualesquiera de ellas, difieren en una constante.** Es decir que si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, $F(x) - G(x) = C$ (C constante), Además, notar que para una función integrable $f(x)$, **la función integral** $g(x)$ **es una primitiva de ella.**

Actividad

Calculemos algunas primitivas. Completar la Tabla.

$f(x)$	$F(x)+C$
0	
k (constante)	
x^n si $n \neq -1$	
$\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$	
e^x	
$sen(x)$	
$cos(x)$	
a^x	
$sec^2(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	

1.6. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Parte I

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ entonces la función integral $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) , continua en $[a, b]$ y $g'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Demostración:

Sea f continua en $[a, b]$ y $x \in (a, b)$

i) si h es positivo y próximo a cero, es:

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Como f es continua en $[x, x+h]$, por el teorema del valor medio para integrales resulta que la última integral es igual a $f(c)h$ para algún número c entre x y $x+h$ y por lo tanto:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(c) \quad \textit{para algún } c \textit{ entre } x \textit{ y } x+h$$

Entonces

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c) = f(x)$$

pues, cuando h tiende a cero por derecha, c tiende a x y, ya que f es continua, $f(c)$ tiende a $f(x)$.

ii) si h es negativo y próximo a cero, con igual razonamiento es, para algún número c entre $x+h$ y x:

$$g(x) - g(x+h) = \int_{x+h}^{x} f(t)dt = f(c)(-h)$$

por lo tanto:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(c) \quad \textit{para algún } c \textit{ entre } x+h \textit{ y } x$$

y entonces

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} f(c) = f(x)$$

Por i) y ii) ,

$$g'(x) = f(x) \quad .$$

Observación:

- Hay que tener cuidado con las funciones integrales de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ donde f es acotada pero *no es continua en todos los puntos del intervalo* $[a, b]$. El Teorema Fundamental no se aplica en esos casos.
- El Teorema Fundamental del Cálculo Integral puede adaptarse a casos más generales, usando la regla de la cadena para derivadas: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ entonces la función integral $g(x) = \int_x^{h(x)} f(t)dt$ es derivable en (a, b) , continua en $[a, b]$ y $g'(x) = f(h(x)).h'(x)\ \forall x \in (a, b)$ (Suponer $h(x)$ derivable en el intervalo).

Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Parte II. Regla de Barrow

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F es una primitiva de f en el intervalo. Entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demostración: Sea $g(x)$ la función integral de $f(x)$ y $F(x)$ una primitiva. Es decir que, $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Resulta entonces que la función $g(x) - F(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y es tal que $(g-F)'(x) = g'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.
Entonces $g(x) - F(x)$ es por lo tanto una función constante en $[a,b]$:

$$g(x) - F(x) = C \quad \forall x \in [a,b]$$

En particular:
$g(a) - F(a) = C$ (de donde se deduce $C = -F(a)$ ya que $g(a) = 0$)
$g(b) - F(b) = C$, entonces,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

.

Notación

Escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

para expresar la diferencia $F(b) - F(a)$. Donde *F(x)* es una primitiva de *f(x)* en un intervalo I con $[a,b] \subset I$.

Es decir que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede determinarse conociendo sólo los valores que toma una primitiva en los puntos a y b.

Importante:

Hemos demostrado un resultado muy importante que muestra que la derivación y la integración son procesos inversos, conectando el Cálculo Diferencial con el Cálculo integra. El Cálculo Diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el Cálculo Integral lo hizo de un problema (en apariencia no relacionado) el problema del área. *Isaac Barrow* (1630-1677), profesor de *Isaac Newton* en Cambridge, descubrió que en realidad estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. Luego, fueron *Newton* y *Leibniz* quienes explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático.

1.6.1. Ejemplos

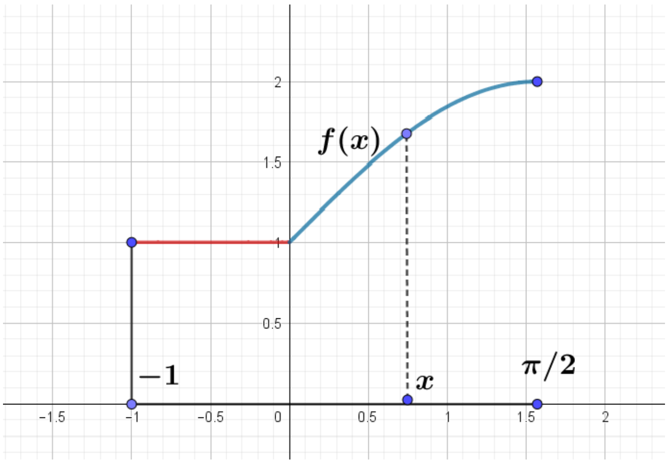
- $\int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{4^3}{3} - 0 = \frac{64}{3}$ (¡vean que hemos calculado en este renglón el valor exacto del área debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 4]$!)

- $\int_{-3}^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-3)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -\frac{80}{4} = -20$

- $\int_0^{2\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -cos(2\pi) - [-cos(0)] = -1 + 1 = 0$

- Calculemos la *función integral* para

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ sen(x) + 1, \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$



Observar que la función $f(x)$ es continua, entonces podemos definir la función integral en ese intervalo, y la misma cumplirá que su derivada es la función dada, por el Teorema Fundamental.

La función integral es:

$$g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

En este caso la función $g(x)$ será a trozos, ya que $f(x)$ lo es.

Si $-1 \leq x < 0$,

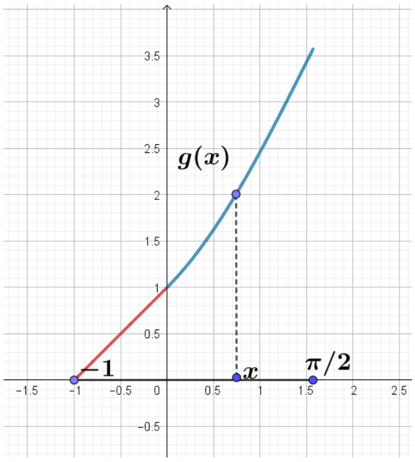
$$g(x) = \int_{-1}^{x} 1dt = x + 1$$

Si $0 \leq x \leq \pi/2$,

$$g(x) = \int_{-1}^{0} 1dt + \int_{0}^{x} (sen(t) + 1)dt = 1 - cos(x) + x + 1 = 2 - cos(x) + x$$

Resultando ser la función integral:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2 - cos(x) + x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$



Notar que en este caso, por ser la función $f(x)$ positiva, la función $g(x)$ calcula el área encerrada por: arriba del eje x, por debajo de la función $f(x)$ y entre $x = -1$ y x, para $x \leq \pi/2$.

Por ejemplo, $g(\pi/2)$ ($g(\pi/2) = 2 - cos(\pi/2) + \pi/2 = 2 + \pi/2$) es el área total debajo de $f(x)$.

Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo, podemos afirmar que la función integral hallada $g(x)$, es derivable y continua en el intervalo (verificarlo), y que $g'(x) = f(x)$.

Observación

Observar que para una función continua $f(x)$ en un intervalo y por el teorema fundamental del calculo integral, si $g(x)$ es su función integral, es decir que $g'(x) = f(x)$, es posible conocer el comportamiento de $g(x)$ a partir del de $f(x)$. Es decir, que se cumple lo siguiente:

$f(x)$	$g(x)$
positiva	crece
negativa	decrece
cero en un punto P	en P existe posible punto critico

1.6.2. Ejercicios

1. Graficar $y = x^3$ e $y = sen(x)$ e interpretar los resultados obtenidos en las integrales de los dos ejemplos anteriores.

2. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones? Tachar la igualdad cuando responden que es falsa y recuerden siempre justificar sus respuestas.

   i) Si f es continua en $[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

   ii) Si f y g son continuas en $[a,b]$,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

3. En los siguientes incisos verificar que los integrandos son funciones continuas o seccionalmente continuas en los intervalos de integración, calcular las integrales e interpretar geométricamente los resultados.

   a) $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2)dx$

   b) $\int_0^1 e^x dx$

   c) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$

   d) $\int_{-1}^2 |x|\, dx$

   e) $\int_{-2}^4 (3x - 5)dx$

   f) $\int_0^1 (1 - 2x - 3x^2)dx$

   g) $\int_1^2 x^{-2} dx$

   h) $\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x} dx$

i) $\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta + 2sen\theta)d\theta$

k) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} sec^2 t\ dt$

l) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\ dx$

m) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

n)$\int_1^4 \frac{t^6-t^2}{t^4}\ dt$

o) $\int_{-1}^{3} f(x)\ dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \ \ si \ -1 \leq x \leq 1 \\ 3-x \ \ si \ 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} sen(2x) \ \ si \ 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ cos(2x) \ \ si \ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

q) Siendo $p \neq -1$ y suponiendo que $0 \notin [a, b]$ $\int_a^b x^p dx$

4. Calculen el valor promedio de la función f en el intervalo dado:
i)$f(x) = senx$ en $[0, \pi]$ *ii)* $f(x) = \sqrt{x}$ en $[4, 9]$
iii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en$[1, 4]$ *iv)* $f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ -2 \leq x < 0 \\ -1 \ \ si \ 0 < x \leq 2 \end{cases}$

5. En los siguientes incisos, analicen si es posible aplicar el teorema del valor medio para integrales y, cuando sea posible, encuentren todos los números c cuya existencia garantiza dicho teorema.

   i)$f(x) = x^2 + 1$ en $[-1, 2]$

   ii)$f(x) = |x^3|$ en $[-1, 4]$

   iii) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & si & 0 < x \leq 6 \end{cases}$

6. En los siguientes incisos, hallen la expresión analítica de la función integral de f en el intervalo dado. En cada caso realizar un esbozo de

las gráficas de f y de su función integral.

$$i)\ f(x) = \begin{cases} x^3 \ \ si \ -2 \leq x \leq 1 \\ 1 \ \ si \ 1 < x \leq 3 \end{cases} \qquad en \ \ [-2,3]$$

$$ii)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ \ si \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 \ \ si \ 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad en \ \ [0,2]$$

$$iii)\ f(x) = \begin{cases} x \ \ si \ 0 \leq x \leq 1 \\ sen(\frac{\pi}{2}x) \ \ si \ 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad en \ \ [0,2]$$

7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$i)\ F(x) = \int_2^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \qquad ii)\ G(x) = \int_2^{x^2} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

8. En los siguientes incisos, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que tiene la abscisa indicada.
i) $f(x) = 2 - \displaystyle\int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt \quad en \ \ x = 1.$
ii) $f(x) = 3 + \displaystyle\int_1^{x^2} sec(t-1) dt \quad en \ \ x = -1.$

9. Hallar una función continua f tal que: $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$

10. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones siendo $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $f(1) = 0$.
i) h es dos veces derivable como función de x.
ii) h y $\dfrac{dh}{dx}$ son funciones continuas.
*iii)*La gráfica de h tiene recta tangente horizontal en $x = 1$.
iv)h tiene un máximo local en $x = 1$.
v)h tiene un mínimo local en $x = 1$.
*vi)*La gráfica de h tiene un punto de inflexión en $x = 1$.
*vi)*La gráfica de $\dfrac{dh}{dx}$ corta al eje x en $x = 1$.

11. Sean $f(x) = sen(2x)cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $\ x \in [0, 2\pi]$ y $F(x)$ la función integral de f en ese intervalo. Usando un software matemático graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones f y F y observar en ese gráfico : *i)* ¿Qué sucede en las gráficas de f y de F en los puntos en los

que $F'(x) = 0$? *ii)*¿En qué intervalos es F creciente? ¿En qué intervalos es F decreciente? ¿Qué pueden decir de f en esos intervalos? *iii)*¿Qué pasa con la gráfica de F en los puntos donde $f'(x) = 0$?

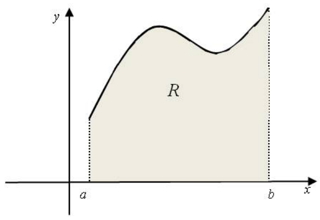
Volvamos al problema del cálculo de la integral definida. Si conociéramos tal valor numérico: ¿Cuáles magnitudes escalares podremos calcular mediante su uso? Veamos a continuación que según sea la función a integrar, la integral calcula diversos valores físicos y geométricos.

1.7. Aplicaciones geométricas de la integral definida

1.7.1. Áreas de figuras planas

Tal como habíamos mencionado, mediante la integración es posible calcular el valor del área de figuras planas. Veamos algunas situaciones.

1. Si f es una función continua y positiva en $[a, b]$ (como se observa en el gráfico). El área encerrada debajo de la gráfica de f *en el intervalo* $[a, b]$ y por encima del eje x, entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$, se calcula por:

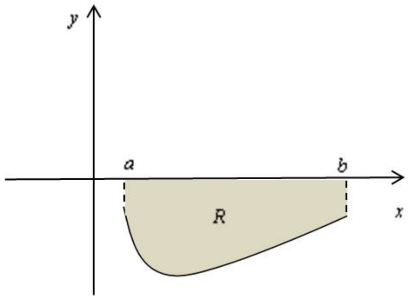


$$\acute{A}rea(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Esa región del plano puede describirse analíticamente de la siguiente manera:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

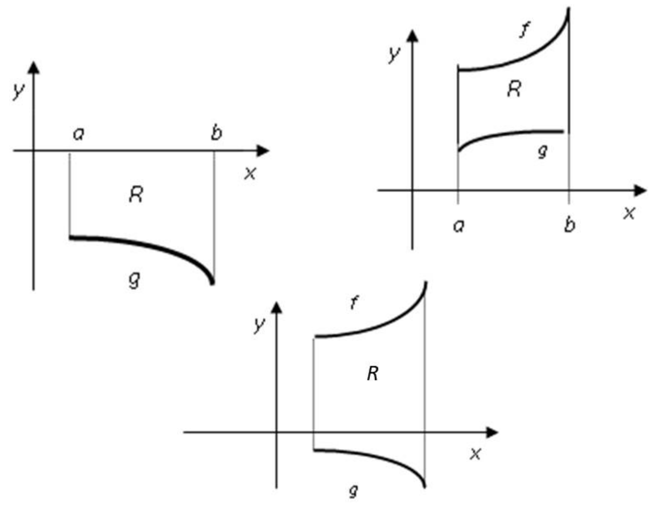
2. Consideremos ahora una función f continua y que toma valores negativos en $[a, b]$ (no hay regiones arriba del eje x). El área de la región ubicada entre la gráfica de f y el eje x, en el intervalo $[a, b]$. se calcula por:



$$\acute{A}rea(R) = \int_a^b (-f(x))dx$$

En estos casos el valor numérico de la integral definida está en unidades de área (ejemplo, metros cuadrados, kilómetros cuadrados, ect.).

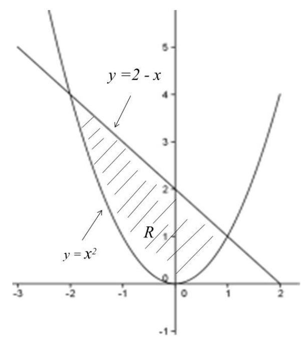
Actividad: Describir analíticamente las siguientes regiones y analizar cómo plantear una integral que calcule el área de cada una de ellas:



En general: Si $f(X)$ y $g(X)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ en ese intervalo, queda definida una región plana que puede describirse analíticamente de la siguiente manera: $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ , \ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$ y cuya área se calcula con: $\int_a^b [f(x) - g(x)] \ dx$.

Ejemplo: Calcular el área de la región R limitada por las curvas $y = x^2$ y $x + y = 2$.

Graficamos ambas curvas y visualizamos la región:



Los puntos de intersección los hallamos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

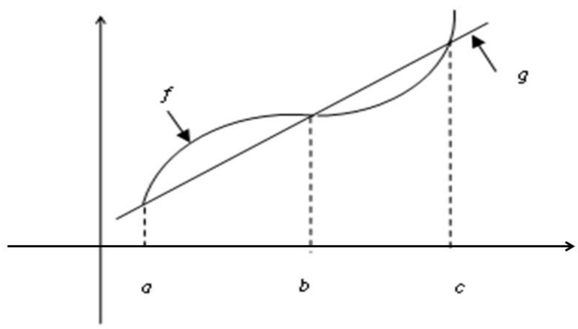
dichos puntos son: $(-2,4)$ y $(1,1)$. Podemos describir en forma analítica la región limitada por las curvas de la siguiente manera:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -2 \leq x \leq 1 \ , \ x^2 \leq y \leq 2 - x \right\}$$

Entonces:

$$\acute{a}rea(R) = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) \, dx \ = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{20}{6}\right) = \frac{27}{6}.$$

Considerar ahora la siguiente situación:



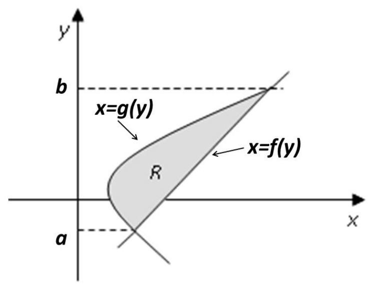
Vean que en el intervalo $[a, b]$ es $g(x) \leq f(x)$ y que en el intervalo $[b, c]$ es $f(x) \leq g(x)$. La región limitada por las gráficas de f y g se describe analíticamente de la siguiente manera:

$$R = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b \leq x \leq c,\ f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$$

Entonces:

$$\acute{a}rea(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \quad + \quad \int_b^c [g(x) - f(x)]\ dx$$

En ocasiones resulta conveniente considerar que la región está limitada por las gráficas de funciones de la variable y.

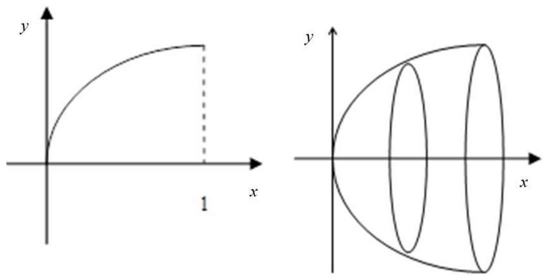


Aquí es $R = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq y \leq b,\ g(y) \leq x \leq f(y)\Big\}$ y entonces:

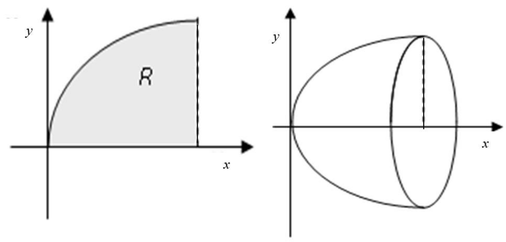
$$\acute{A}rea(R) = \int_a^b [f(y) - g(y)]\ dy$$

1.7.2. Volumen de un sólido de revolución

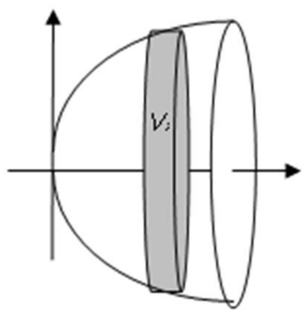
Imaginar que la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, 1]$ rota alrededor del eje x... Cada punto $(x, \sqrt{x})$ de la curva describe una circunferencia centrada en $(x, 0)$ y de radio $\sqrt{x}$, generándose una superficie que, decimos, es una *superficie de revolución*.



Dicha superficie está limitando a un sólido V que, decimos, es un *sólido de revolución*. Podemos interpretar que dicho sólido es el generado al rotar alrededor del eje x la región limitada por $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$ y $x = 1$.



Para calcular el volumen del sólido de revolución V vamos a reproducir - adaptándolo a este nuevo problema- el procedimiento que utilizamos para calcular el área debajo de la gráfica de una función continua y no negativa en un intervalo cerrado (¿lo recuerdas?) En ese caso, aproximamos el área de la región sumando las áreas de rectángulos. Ahora aproximaremos el volumen del sólido considerando sólidos cilíndricos como el que muestra la siguiente imagen:



Sea $\mathcal{P} : x_0 = 0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ...x_n = 1$ una partición del intervalo $[0, 1]$; sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y sea $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ (cualquiera).
Siendo así,

$$\pi \left[f(x_i^*)\right]^2 \ \Delta x_i$$

es el volumen de un cilindro de radio $f(x_i^*)$ y altura Δx_i, como el que muestra la imagen anterior.
Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i^*)\right]^2 \ \Delta x_i \approx vol(V)$$

y

$$vol(V) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i^*)\right]^2 \Delta x_i = \int_0^1 \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

Como habíamos mencionado que $f(x) = \sqrt{x}$,

$$vol(V) = \int_0^1 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_0^1 x \ dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

Si f es una función continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ ; \ 0 \leq y \leq f(x)\}$, el volumen del sólido de revolución que genera R al rotar alrededor del eje x puede calcularse con la siguiente integral definida:

$$Volumen = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

Actividad: Les proponemos ahora que piensen en los sólidos generados y en cómo calcular el volumen en las siguientes situaciones:

1. Una región R que puede describirse en la forma
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \; ; \; 0 \leq x \leq g(y)\}$,
   rota alrededor del eje y.

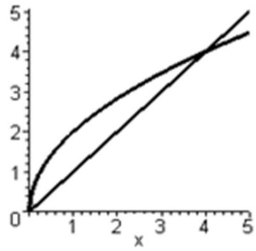
2. Una región R que puede describirse en la forma
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \; ; \; 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x)\}$,
   rota alrededor del eje x.

3. Una región R que puede describirse en la forma
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \; ; \; 0 \leq f(y) \leq x \leq g(y)\}$,
   rota alrededor del eje y.

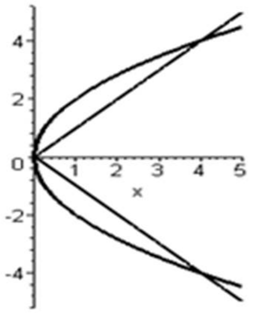
4. Una región R que puede describirse en la forma
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \; ; \; y_0 \leq f(x) \leq y \leq g(x)\}$,
   rota alrededor de la recta horizontal $y = y_0$.

5. Una región R que puede describirse en la forma
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \; ; \; x_0 \leq f(y) \leq x \leq g(y)\}$,
   rota alrededor de la recta vertical $x = x_0$.

Ejemplo: Sea R la región limitada por $y = \sqrt{4x}$ e $y = x$.



Cuando R rota alrededor del eje x genera un sólido (de revolución) que tiene una cavidad. El siguiente gráfico muestra un corte de dicho sólido (plano xy):

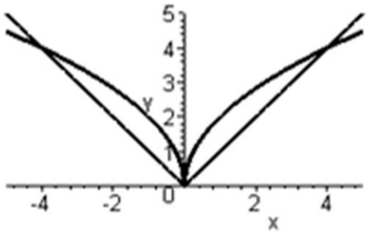


El volumen del sólido puede obtenerse en este caso como la diferencia entre los volúmenes de V_1 (sólido generado por $R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 4\ ;\ 0 \leq y \leq \sqrt{4x}\right\}$, rotando alrededor del eje x) y V_2 (sólido generado por $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 4\ ;\ 0 \leq y \leq x\}$, rotando alrededor del eje x) o sea, de la siguiente manera:

$$vol = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{4x}\right]^2 dx - \int_0^4 \pi \left[x\right]^2 dx$$

(Tarea: completar el cálculo de las integrales y verificar que el resultado es $\frac{32}{3}\pi$)

Si la misma regiónR rota alrededor del eje y, el corte en el plano xy del sólido generado se ve de la siguiente manera:



El volumen puede calcularse como la diferencia entre los volúmenes de dos sólidos , a saber: el sólido V_1 generado por
$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 \; ; \; 0 \leq x \leq y\right\}$ rotando alrededor del eje y y V_2 generado por $R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 \; ; \; 0 \leq x \leq \dfrac{y^2}{4}\right\}$ rotando también alrededor del eje y. Entonces, en este caso es:

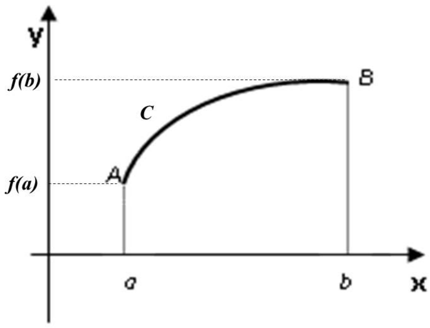
$$vol = \int_0^4 \pi \, [y]^2 \, dy - \int_0^4 \pi \left[\frac{y^2}{4}\right]^2 dy$$

(Completar el cálculo de las integrales y verificar que el resultado es $\frac{128}{15}\pi$)

- Puedes utilizar esta aplicación de **GeoGebra** para visualizar y calcular el volumen de un sólido de revolución.

1.7.3. Longitud de un arco de curva

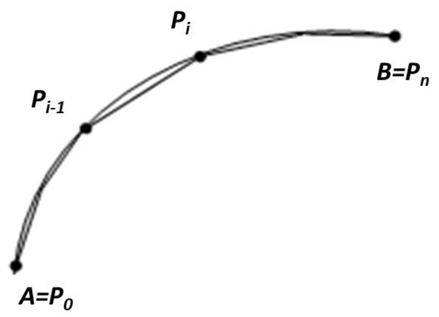
Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y con derivada también continua en ese intervalo y sea $C : y = f(x) \; ; \; x \in [a, b]$.



Con la intención de calcular la longitud de C, consideremos
$\mathcal{P} : a = x_0 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ (partición del intervalo $[a, b]$).
Esa partición determina puntos $P_i = (x_i, f(x_i))$,con $i = 0...n$, en el arco de curva C y lo divide en n sub arcos $\overset{\frown}{\mathrm{P_{i-1}P_i}}$.

Si aproximamos la longitud de cada uno de esos sub arcos con la longitud del segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$, tendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \approx Long(C)$$



Siendo (para cada $i = 1...n$) f continua en $[x_{i-1}, x_i]$ y derivable en (x_{i-1}, x_i), en virtud del teorema del valor medio de Lagrange podemos afirmar que existe $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$. Entonces

$$Long(C) \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\Delta x_i$$

$$Long(C) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\Delta x_i$$

$$\boxed{Longitud(C) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx}$$

Ejemplo: Calcular la longitud del arco de curva $y = \sqrt{x^3}$ de extremos $A = (0,0)$ y $B = (4,8)$.
Siendo $y = f(x) = \sqrt{x^3}$, es $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (función que es continua en $[0,+\infty)$) y la longitud del arco de curva se calcula entonces de la siguiente

manera:

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}\,x}\;\;dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4}\,(4+9x)}\;\;dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+9x}\;\;dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{9}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{27}(\sqrt{40^3}-8)$$

1.7.4. Ejercicios. Áreas de figuras planas

1. En los siguientes incisos, hallen el área de la región limitada por las curvas dadas.
   i) $y = x^3$; $y = x^2$ *ii)* $y = x^2$; $y = -x^4 + 2$ *iii)* $y = 2x$; $y = x^4$
   iv) $y = x$; $y = x^2 - 2$ *v)* $4x + y^2 = 0$; $y = 2x + 4$
   vi) $x + 1 = 2(y-2)^2$; $x + 6y = 7$

2. Grafiquen la región limitada por: $xy = 2$; $2x = y$; $x = 2y$.
   *i)*Para describir la región y calcular luego su área, les parece que ofrece alguna ventaja en este caso el considerar las curvas que conforman la frontera de la región como gráficas de funciones de x o de y?
   ii) Describan analíticamente la región y calculen su área.

3. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$ definen una región? ¿Cuál es la expresión en función de m del área de dicha región?

4. Calculen el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$ y el eje x.

1.7.5. Ejercicios. Volumen de sólidos de revolución

1. Calculen el volumen del sólido que genera la región del plano limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,2]$al rotar:
   i) alrededor del eje x *ii)* alrededor del eje y

2. En los siguientes incisos, calculen el volumen del sólido que genera la región R al rotar como se indica .
   a) R limitada por $y = x^2$ e $y = 1$ rota alrededor del eje x.
   b) R limitada por $y = x^2$ e $y = x$ rota alrededor del eje x.
   c) R limitada por $y = x^2$, $x = 1$ e $y = 0$ rota alrededor del eje x.
   d) R limitada por $y = x^2$, $x = 1$ e $y = 0$ rota alrededor del eje y.
   e) R limitada por $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ e $y = 0$ rota alrededor del eje x.
   f) R limitada por $x = \sqrt{4-y}$, $x = 0$ e $y = 0$ rota alrededor de la recta $x = 2$.

3. Siendo R limitada por $y = \dfrac{1}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$, planteen las integrales con las que se calcula:
   i) el área de R.
   ii) el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor del eje y.
   iii) el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor de la recta $y = -1$.
   iv) el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor de la recta $x = 4$.

4. Calculen mediante integrales :
   a) el volumen de una esfera de radio a.
   b) el volumen de un cono circular recto, siendo r el radio de la base y h la altura.

1.7.6. Ejercicios. Longitud de arco de curva plana

1. Calcular la longitud del segmento de recta $2x - 4y + 6 = 0$ con extremos $(-3, 0)$ y $(1, 2)$ mediante una integral definida. Comprobar el resultado usando la fórmula de distancia entre dos puntos. ¿En qué variable integraron? Repetir el cálculo integrando en la otra variable.

2. Calcular la longitud del arco de curva $C : y = 2\, x^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{1}{3} \leq x \leq 7$.

3. Un cable suspendido entre dos torres eléctricas que distan entre sí 40 metros adopta la forma de una *catenaria* de ecuación

$$y = 20\, cosh(\frac{x}{20}) \ \ ; \ \ -20 \leq x \leq 20$$

   ¿Cuánto mide el cable?

1.8. Aplicaciones físicas de la integral definida

1.8.1. Desplazamiento de un móvil en línea recta

Supongamos que $v(t)$ mide el valor de la *velocidad de un móvil que se desplaza en línea recta*, siendo t el tiempo, variable independiente. La función velocidad en un intervalo de tiempo puede ser positiva (significa que el móvil se mueve hacia adelante sobre la recta) o negativa (significa que el móvil se mueve en dirección hacia la izquierda según los valores de crecimiento del eje).

Entonces la integral definida calcula el desplazamiento realizado por el móvil desde el tiempo a hasta b.

$$Desplazamiento = \int_a^b v(t)dt$$

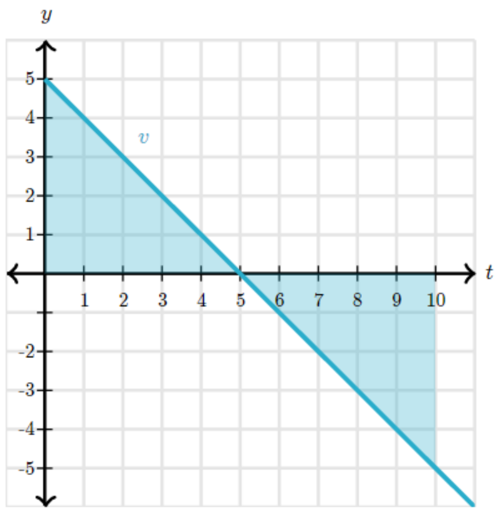
Y la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo se calcula por:

$$Distancia\ total\ recorrida\ = \int_a^b |v(t)|\, dt$$

El resultado numérico es en la unidad de medida de longitud.

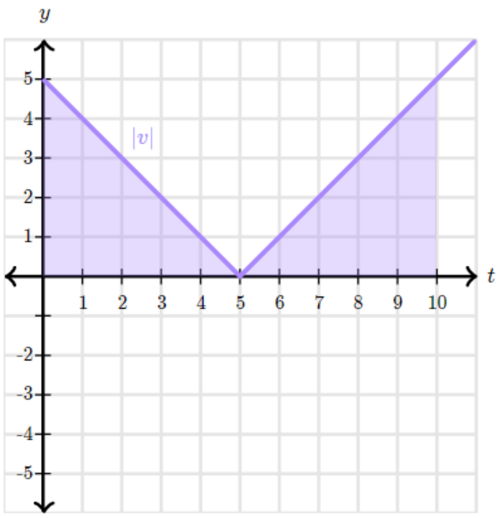
Ejemplo Sea $v(t)$ la velocidad de un móvil en el intervalo de 0 a 10 seg. y supongamos que $v(t) = 5 - t$, dada en m/seg.

En este caso, el Desplazamiento$=\int_0^{10}(5-t)dt = 0$ metros.



Y la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo es:

Distancia total recorrida$=\int_0^{10} |5-t|\, dt = \int_0^5 (5-t)dt + \int_5^{10}(t-5)dt = 25$ metros.



1.8.2. Masa de una barra con densidad variable continua

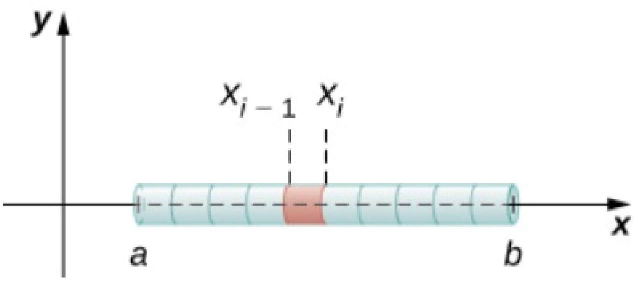
Consideremos una barra o alambre lo suficientemente delgado como para ser tratado como un objeto unidimensional. Lo colocamos sobre el eje x, con el extremo izquierdo de la barra en $x = a$ y el extremo derecho de la barra en $x = b$. Podemos calcular la masa de la barra orientada a lo largo del eje x integrando su función densidad. Si la barra tiene una densidad constante d (homogénea), dada en términos de masa por unidad de longitud, entonces la masa de la barra es solo el producto de la densidad y la longitud de la barra:

$$Masa = (b - a)d$$

Sin embargo, si la densidad de la varilla no es homogénea, el problema se vuelve un poco más complicado. Cuando la densidad de la barra varía de un punto a otro, denotemos con

$$d(x)$$

a la densidad de la barra en cualquier punto x.



Con la intención de calcular la masa, consideremos una partición del intervalo y una suma de Riemman asociada a la partición
$\mathcal{P} : a = x_0 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ (partición del intervalo $[a, b]$).
Esa partición determina puntos $P_i = (x_i, d(x_i))$,con $i = 0...n$, en la barra y la divide en segmentos.
Si aproximamos la masa de la barra en cada segmento con la longitud del segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$, tendremos: que la masa m_i del segmento de la barra de x_{i-1} a x_i se aproxima por la longitud de tal segmento por el valor de la densidad en un punto del intervalo. Con lo cual al tomar el límite de la suma de Riemman y suponiendo que la integral existe, resulta:

$$\boxed{Masa = \int_a^b d(x)dx}$$

1.8.3. Trabajo

El concepto de trabajo es importante para el ingeniero cuando necesita determinar la energía necesaria para realizar diferentes tareas físicas. Es útil conocer la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa eleva una viga de acero, cuando se comprime un muelle, cuando se realiza un lanzamiento, o cuando un vehículo transporta una carga. En el lenguaje cotidiano, el término trabajo se utiliza para indicar la cantidad total de esfuerzo requerido para realizar una tarea. En física tiene un significado técnico que está en relación con la idea de fuerza. Intuitivamente se puede pensar una fuerza como el hecho de empujar un objeto o tirar de él. Decimos que se hizo un trabajo cuando una fuerza mueve un objeto.

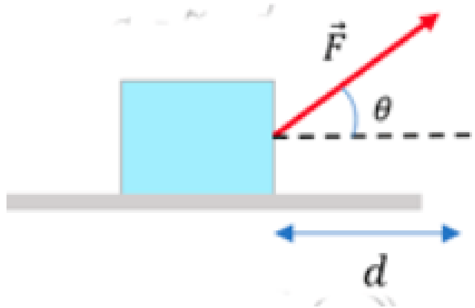
Existen muchos tipos de fuerzas: centrífuga, gravitacional, etc. Una fuerza cambia el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitacionales en la tierra se suelen utilizar unidades de medida correspondientes al peso de un objeto. Cuando la fuerza es constante todo parece sencillo pero cuando se aplica una fuerza variable a un objeto se necesita el cálculo para determinar el trabajo realizado ya que la fuerza varía según el objeto cambia de posición. *(Referencia: Resnick, R., Halliday, D. (1970). Física: parte 1.)*

En física el modo general de definir el $trabajo\ W$ (magnitud escalar) realizado por una $fuerza\ \vec{F}$ para mover un objeto en la dirección de un desplazamiento $\vec{d}$ es el *producto escalar* de la fuerza por el desplazamiento:

$$W = \vec{F}.\vec{d}$$

En términos de la definición del producto escalar y llamando a $F = \left|\vec{F}\right|$, $d = \left|\vec{d}\right|$ y a θ al ángulo formado entre los vectores, resulta:

$$W = \left|\vec{F}\right| . \left|\vec{d}\right| .cos(\theta)$$



A partir de esta definición general, vemos ahora el caso particular cuando el desplazamiento es en línea recta y la fuerza actúa en la misma dirección del movimiento, y como calcular el trabajo.

Trabajo realizado por una fuerza en la dirección del desplazamiento en línea recta La figura siguiente interpreta este caso particular, es decir el caso en que el ángulo θ es cero, por lo tanto el $cos(\theta) = 1$.

- Si la **fuerza $\vec{F}$ aplicada al objeto es constante** y tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento que suponemos además es en línea recta, entonces, en este caso el trabajo es:

  $$W = F.d$$

  donde F es la magnitud de la fuerza y d es el desplazamiento ocurrido.

- Si la **fuerza $\vec{F}$ tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento pero es variable**, en este caso, supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta desde $x = a$ hasta $x = b$ debido a una fuerza que varía continuamente y su magnitud es $F(x)$, entonces para calcular el trabajo, se procede del siguiente modo.

Consideramos una partición que divide al intervalo $[a, b]$ en subintervalos tal como se ha realizado con anterioridad, y consideramos la suma de Riemman para tal partición, obtenemos que, en cada subintervalo el trabajo realizado se aproxima a $F(x_i^*)\Delta x_i$, tomando límite, el trabajo total realizado por el objeto al moverse desde a hasta b por la fuerza está dada por:

$$W = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i$$

.

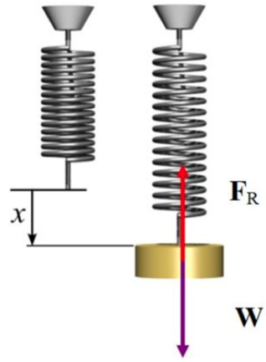
Entonces si un objeto se mueve a lo largo de una recta debido a la acción de una fuerza que varía continuamente cuya magnitud es $F(x)$ y actúa sobre el objeto en la misma dirección y sentido que el desplazamiento, entonces el trabajo realizado por la fuerza conforme el objeto se mueve desde $x = a$ hasta $x = b$ es posible calcularlo por (en el caso que F sea integrable):

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)dx}$$

Ejemplo: Ley de Hooke Un ejemplo de lo anterior es el cálculo del trabajo requerido para alargamiento o compresión de un resorte que realiza una fuerza variable. Supongamos que estiramos el resorte de modo que su extremo se mueve hasta una posición x , el resorte ejerce una fuerza sobre el agente que lo estira cuya valor es aproximadamente

$$F(x) = -k.x$$

siendo k una constante de proporcionalidad, que depende del material, del calibre (grosor), del alambre, de la temperatura, etc. Notar que la fuerza no depende de la longitud natural del resorte, sino solo de su desplazamiento. El sentido de la fuerza es siempre opuesto al desplazamiento del extremo con respecto al origen. Es decir, cuando se estira el resorte $x > 0$ y F es negativo, cuando se comprime $x < 0$ y F es positivo. La fuerza F siempre está dirigida hacia el origen. Esta se conoce como *Ley de Hooke* que indica que para un cierto rango llamado *rango de elasticidad o límite elástico*, la fuerza necesaria para deformar un resorte es proporcional a la distancia que se ha deformado.



Para estirar un resorte debemos aplicar sobre él una fuerza igual a F pero de sentido contrario. La fuerza aplicada es por consiguiente $F = k.x$ y el trabajo W_R efectuado por la fuerza aplicada al estirar el resorte de manera que su extremo se mueva de 0 a x_f es muy sencillo de calcular (área de un triángulo):

$$W_R = \int_0^{x_f} k.xdx = (1/2).k.(x_f)^2$$

Esto último resultado es útil por ejemplo para estimar la constante k.

En física e ingeniería muchas magnitudes escalares pueden ser calculadas a partir de la integral definida de una función adecuada (según sea el caso). A las mencionadas anteriormente, existen muchas otras aplicaciones, como son el cálculo de *momentos*, *centros de masa* y *fuerza ejercida por la presión de un líquido*.

Además mencionar que las unidades del valor numérico de la integral definida para el caso en que se calcule una magnitud física o geométrica dependerá de las unidades de los ejes x e y. Si por ejemplo el eje horizontal está en segundos, y el eje vertical está en metros sobre segundos al cuadrado, la integral estará en unidades de metros sobre segundo. Este caso se presenta por ejemplo en cinemática cuando integramos la función aceleración $a(t)$.

1.8.4. Ejercicios. Aplicaciones físicas de la integral definida

1. Un móvil se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = t^2 - 2t$, metros por segundo, donde t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es la distancia total que recorre el móvil entre $t = 0$ y $t = 3$ segundos? ¿Cuál es el

desplazamiento del móvil entre $t = 0$ y $t = 3$ segundos? Graficar en cada caso.

2. La densidad lineal de una barra de 4 metros varia en cada punto de la misma directamente proporcional a la distancia de ese punto a un punto exterior colocado a 2 metros del extremo derecho de la barra, donde la densidad es de $5kg/m$. Calcular la masa total de la barra. Esquematizar la situación.

3. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por acción de una fuerza $f(x)$ (kilos) cuando la partícula está a x metros del origen. Si $f(x) = x^2 + 4$ calcular el trabajo realizado conforma la partícula se mueve de $x = 2$ a $x = 4$ metros.

4. Un resorte tiene una longitud natural de 14 cm. Si una fuerza de 500 dinas se requiere para estirar el resorte 2 cm. (dina: fuerza que, aplicada a la masa de un gramo, le comunica una aceleración de 1 centímetro en un segundo al cuadrado). Calcular el trabajo que se realiza para estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 18 cm.

1.9. Integral indefinida

Como hemos visto, el problema del cálculo de la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado queda resuelto una vez hallada una primitiva de la función. Para diversas funciones hemos llevado adelante con éxito la búsqueda de primitivas, pero sabemos que esa tarea no siempre es sencilla. A diferencia de lo que sucede con el cálculo de derivadas, no hay reglas que conduzcan, a través de su aplicación sistemática, a la determinación de las primitivas de cualquier función. En las siguientes páginas conoceremos algunas técnicas que nos permitirán, en algunos casos, hallar primitivas. Antes de eso, definiremos lo que se entiende por *integral indefinida* y adoptaremos una notación muy conveniente para referirnos a todas las primitivas de una función.

Propiedad

Si *F(x)* es una primitiva de *f(x)*, entonces toda otra primitiva de f tiene la forma $F(x) + C$, siendo C una constante arbitraria. $F(x) + C$ se llama primitiva general de *f(x)*.
El símbolo $\int f(x)\, dx$ se lee: *integral indefinida de la función* f y representa la *primitiva general* de *f(x)*. Es decir que: si *F(x)* es una primitiva de *f(x)*, $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

Ejemplos:

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + C$$

Nota: Aunque no lo indicamos, es importante tener en cuenta que las igualdades anteriores son válidas en determinados intervalos de números reales. La primera es válida en cualquier intervalo I incluido en $\mathbb{R}$, la segunda, en cualquier $I \subset (0, \infty)$ y la última en $I \subset (0, \infty)$ o $I \subset (-\infty, 0)$.

1.9.1. Ejercicios

Conociendo las derivadas de algunas funciones y las reglas de derivación, podrán ustedes hallar las siguientes integrales indefinidas:

i) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

iii) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$ iv) $\int (x^3 + \sqrt{3}))\, dx$

v) $\int \frac{1}{2x}\, dx$ vi) $\int (cos(3x) + 3senx)\, dx$ vii) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^2}\, dx$

viii) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}}\, dx$ ix) $\int y^2(y^2 - 3)\, dy$ x) $\int (t^2 + 1)^2\, dt$

1.10. Técnicas de integración: Método de sustitución

Dada la siguiente integral: $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\ dx$

Para resolverla conviene observar que si llamamos $g(x)$ a $(x^4 + 3x)$ entonces $g'(x) = 4x^3 + 3$ y la integral resulta ser : $\int [g(x)]^{30}\, g'(x)dx$. Observamos así que el integrando no es otra cosa que la derivada de $\dfrac{[g(x)]^{31}}{31}$ y que por lo tanto:

$$\int (x^4+3x)^{30}(4x^3+3)\ dx = \int [g(x)]^{30}\, g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C = \frac{[(x^4+3x)]^{31}}{31} + C$$

Método de Sustitución

En general, siendo F una primitiva de f,

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + C$$

ya que, en virtud de la regla de la cadena es : $[F(g(x))]' = f(g(x)).g'(x)$. Lo anterior justifica que en una integral de la forma $\int f(g(x))g'(x)\ dx$ reemplacemos a g(x) por u y escribamos:

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplos:

- $\int (2x+3)cos(x^2+3x)dx$
  siendo $u = x^2 + 3x$, $du = (2x+3)dx$
  y la integral se resuelve de la siguiente manera:
  $$\int (2x+3)cos(x^2+3x)dx = \int cos(u)du = sen(u) + C = sen(x^2+3x) + C$$

- $\int (5x^3 + 3x - 8)(5x^2 + 1)dx$
  siendo $u = 5x^3 + 3x - 8$, $du = 3(5x^2+1)dx$.
  Resulta entonces: $(5x^2+1)dx = \dfrac{1}{3}du$
  y la integral se resuelve de la siguiente manera:
  $$\int (5x^3+3x-8)(5x^2+1)dx = \int u\ \frac{1}{3}\ du = \frac{1}{3}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{6}(5x^3+3x-8)^2 + C$$

Cambio de variable en integrales definidas
Observación:
Para una integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

el cambio de variable $x = g(u)$ introduce el factor $g'(u)$ en el integrando y modifica los límites de integración para la variable u, resultando $a = g(c)$ y $b = g(d)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Para calcular $\int_{-1}^5 x(x^2+1)^3\,dx$ podemos aplicar el método de sustitución de la siguiente manera:

siendo $u = x^2+1$, $du = 2xdx$, asi que $xdx = \frac{1}{2}du$. Resulta entonces:

$$\int_{-1}^5 x(x^2+1)^3\,dx = \int_2^{26} u^3\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_2^{26} u^3du = \frac{1}{2}.\frac{u^4}{4}\Big|_2^{26} = \frac{26^4}{8} - \frac{2^4}{8} = 57120$$

Como habrán observado, los límites de integración de la integral expresada en la variable u no son los mismos que en la variable x .

$$x = -1 \implies u = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$x = 5 \implies u = 5^2 + 1 = 26$$

1.10.1. Ejercicios

1. Integrar aplicando el método de sustitución.

i) $\int \frac{arctg\ x}{1+x^2}\,dx$ ii) $\int \frac{ln\ x}{x}\,dx$ iii) $\int tg^5x\ sec^2x\,dx$ iv) $\int tgx\,dx$

v) $\int ctgx\,dx$ vi) $\int 3x^4(2x^5+9)^3\,dx$ vii) $\int cos(3x+2)\,dx$

viii) $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$ ix) $\int \frac{xsen\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ x) $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}\left(\frac{1}{t^2}\right)\,dt$

xi) $\int x\,e^{x^2}\,dx$ xii) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ xiii) $\int (senx + cosx)^2\,dx$

xiv) $\displaystyle\int \frac{6cost}{(2+sent)^3}\,dt$ xv) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$ xvi) $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+4}\,dt$

xvii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ xviii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales definidas realizando un cambio de variable.

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{ln\ x}{x}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ iv) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x+1}\ e^x dx$

1.11. Métodos de integración: Integración por partes

Recordar que si *u(x)* y *v(x)* son funciones derivables entonces

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Integrando ambos miembros de esa igualdad resulta:

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

y de allí se obtiene lo siguiente:

Regla de integración por partes

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

que usualmente se escribe:

$$\int u\ v'\ dx = u\ v - \int v\ u'\ dx$$

Como se observa, la fórmula traslada el problema de integrar $u(x)v'(x)$ al de integrar $v(x)u'(x)$ (y será de utilidad cuando pueda aplicarse y esa segunda integral sea más sencilla que la primera, o al menos no tan complicada).

Ejemplos:

- $\displaystyle\int x\ e^x\ dx$
  Sea $u = x \quad ; \quad dv = e^x\ dx$

entonces: $du = dx \quad ; \quad v = e^x$

y, resulta: $\displaystyle\int x\ e^x\ dx = x\ e^x - \int e^x\ dx = x\ e^x - e^x + C$

(¡Noten que si se hacía $u = e^x \quad ; \quad dv = x\ dx$ (que era otra posibilidad) quedaba: $du = e^x dx \ ; \ v = \dfrac{x^2}{2}$ y la integral a resolver era más complicada que la original!)

- $\displaystyle\int x\ lnx\ dx$

  En este caso, considerando que $\dfrac{d(lnx)}{dx} = \dfrac{1}{x}$ conviene hacer:

  $u = lnx \quad ; \quad dv = x\ dx$

  entonces: $du = \dfrac{1}{x}dx \quad ; \quad v = \dfrac{x^2}{2}$

  y, resulta:

  $$\int x\ lx\ dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2}\ \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$$

- $\displaystyle\int x^2\ e^x\ dx$

  Sea $u = x^2 \quad ; \quad dv = e^x\ dx$

  entonces: $du = 2xdx \quad ; \quad v = e^x$

  y, resulta: $\displaystyle\int x^2\ e^x\ dx = x^2\ e^x - \int 2x\ e^x\ dx = x^2\ e^x - 2\int x\ e^x\ dx = (*)$

  Noten que la integral que ha quedado para resolver se resuelve aplicando otra vez la integración por partes (de hecho, es la integral que resolvimos en el ejemplo 1)

  $$(*) = x^2\ e^x - 2\left[x\ e^x - e^x\right] + C = x^2\ e^x - 2x\ e^x + 2e^x + C$$

- $\displaystyle\int e^x\ cosx\ dx$

  Sea $u = e^x \quad ; \quad dv = cosx\ dx$

  entonces: $du = e^x dx \quad ; \quad v = senx$

  y resulta: $\displaystyle\int e^x\ cosx\ dx = e^x senx - \int e^x\ senxdx$

La integral a resolver es de la misma dificultad que la original. Apliquemos nuevamente el método de integración por partes a esa integral:

$$u = e^x \qquad\qquad dv = senx\ dx$$

$$du = e^x dx \qquad v = -cosx$$

$$\int e^x\ senxdx = -e^x cosx - \int e^x(-cosx)dx$$

Por lo tanto:

$$\int e^x\ cosx\ dx = e^x senx - \left[-e^x cosx - \int e^x(-cosx)dx\right]$$

$$\int e^x\ cosx\ dx = e^x(senx + cosx) - \int e^x cosxdx$$

$$2\int e^x\ cosx\ dx = e^x(senx + cosx) + C$$

o sea:

$$\int e^x\ cosx\ dx = \frac{1}{2}\ e^x(senx + cosx) + C$$

1.11.1. Ejercicios

1. Integren aplicando el método de integración por partes. i) $\int x^2 cosx\ dx$

   ii)$\int x\ senx\ dx$

   iii) $\int x\ sec^2 x\ dx$

   iv)$\int lnx\ dx$

   v)$\int arctgx\ dx$

   vi) $\int arcsenx\ dx$

   vii)$\int (lnx)^2\ dx$

   viii) $\int e^x senx\ dx$

2. Calcular el área de la región limitada por:
   a) $y = lnx$; $y = 0$; $x = 6$.
   b) $y = arcsenx$; $y = 0$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Calcular volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por: $y = lnx$; $y = 0$; $x = 5$, rotando alrededor del eje x.

1.12. Métodos de integración: uso de identidades trigonométricas

- $\int sen^2x\ dx$ y $\int cos^2x\ dx$

  Teniendo en cuenta que $cos2x = cos^2x - sen^2x$

  y que $sen^2x + cos^2x = 1$

  se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} sen^2x &= \frac{1 - cos2x}{2} \\ cos^2x &= \frac{1 + cos2x}{2} \end{aligned}}$$

  De modo que:

$$\int sen^2x\ dx = \int \frac{1 - cos2x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int (1 - cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sen2x}{2}\right) + C$$

$$\int cos^2x\ dx = \int \frac{1 + cos2x}{2}\ dx = \text{........................}$$

- $\int tg^2x\ dx$ y $\int ctg^2x\ dx$

  Usamos para estas integrales las siguientes identidades:

$$\boxed{\begin{aligned} tg^2x &= sec^2x - 1 \\ ctg^2x &= cosec^2x - 1 \end{aligned}}$$

$$\int tg^2x\ dx = \int \left(sec^2x - 1\right)\ dx = tgx - x + C$$

$$\int ctg^2x\ dx = \int \left(cosec^2x - 1\right)\ dx = ...$$

- $\displaystyle\int sen^4x\ dx$

  Tratándose de la función seno elevada a una potencia par, usamos la identidad que nos permitió integrar sen^2x:

$$\begin{aligned}
\int sen^4x\ dx = \int \left[sen^2x\right]^2\ dx = \int \left[\frac{1 - cos2x}{2}\right]^2 dx = \\
= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2cos2x + cos^2 2x\right)\ dx = \\
= \frac{1}{4}\left[\int 1\ dx\ - \int 2cos2x\ dx\ + \int \left(\frac{1 + cos4x}{2}\right)\ dx\right] = \\
= \frac{1}{4}\left[\int 1\ dx\ - \int 2cos2x\ dx\ + \frac{1}{2}\int (1 + cos4x)\ dx\right] = \\
\frac{1}{4}\left[x - sen2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen4x}{4}\right)\right] = \\
= \frac{3}{8}x - \frac{sen2x}{4} + \frac{sen4x}{32} + C
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int sen^3x\ dx$

  Tratándose de la integral de una potencia impar de $sen(x)$ usaremos la relación pitagórica ($sen^2 + cos^2 = 1$) de la siguiente manera:

$$\int sen^3x\ dx = \int sen^2x\ senx\ dx = \int \left(1 - cos^2x\right)\ senx\ dx =$$

$$= \int senx\ dx - \int cos^2x\ senx\ dx = ...$$

  (una sustitución en la segunda integral del último renglón permitirá completar el cálculo)

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx$

  El procedimiento que seguiremos en este caso se conoce como "sustitución trigonométrica". Teniendo presente que $1 - sen^2u = cos^2u$ remplazamos x por "$sen\ u$ "

Siendo $x = senu$ resulta: $dx = cosu\ du$ y además:
$x = 0 \implies u = 0$

$x = 1 \implies u = \dfrac{\pi}{2}$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{cos^2u} = \Big|cosu\Big| = cosu$ (pues, $u \in [0, \frac{\pi}{2}] \to cosu > 0$)

y resulta entonces que :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosu\ cosu\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2u\ du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+cos2u)\ du = \frac{1}{2}\left[u + \frac{sen2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

¿Qué interpretación geométrica puede hacer del resultado anterior?

1.12.1. Ejercicios

1. Calcular el volumen del sólido que genera la región del plano limitada por las curvas: $y = x + senx$; $y = 0$ y $x = \pi$, cuando rota alrededor del eje x.

2. Integrar:

   i) $\displaystyle\int sec^2x\ dx$ ii) $\displaystyle\int tg^2x\ dx$ iii) $\displaystyle\int tg^3x\ dx$ iv) $\displaystyle\int cosec^2x\ dx$

3. Sabiendo que

   $sen(A{+}B) = senAcosB{+}cosAsenB$; $sen(A{-}B) = senAcosB{-}cosAsenB$

   $cos(A{+}B) = cosAcosB{-}senAsenB$; $cos(A{-}B) = cosAcosB{+}senAsenB$

   mostrar la validez de las siguientes igualdades y usarlas para integrar en los incisos que están a continuación.

$$senA\ cosB = \frac{1}{2}\left[sen(A-B) + sen(A+B)\right]$$
$$senA\ senB = \frac{1}{2}\left[cos(A-B) - cos(A+B)\right]$$
$$cosA\ cosB = \frac{1}{2}\left[cos(A-B) + cos(A+B)\right]$$

$$\text{i)}\int sen2x\ cos3x\ dx \quad \text{ii)}\int sen8x\ sen3x\ dx \quad \text{iii)}\int cos4x\ cos5x\ dx$$

4. Calcular el área de la región del plano limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

5. Integrar: i) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\ dx$, mediante la sustitución $x = senh(u)$.

   ii) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x^2-1}\ dx$, mediante la sustitución $x = cosh(u)$.

1.13. Métodos de integración: fracciones simples

El método de las *fracciones simples* o *fracciones parciales* puede aplicarse para integrar funciones racionales, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son funciones polinomiales y el grado de P es menor que el grado de Q.

Ejemplos:

- $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\ dx$

  Observar que $\dfrac{x+5}{x^2+x-2}$ es un cociente de polinomios y que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. El denominador se factoriza como el producto de dos factores lineales diferentes: $x-1$ y $x+2$, y siendo así, podremos determinar dos constantes A y B tales que :

  $$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

  Para ello, efectuamos la suma de las dos últimas fracciones:

  $$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} =$$

  $$= \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

Para que sea

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

debe cumplirse que:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones se tiene: $A = 2$ y $B = -1$ de modo que :

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

y resulta :

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\, dx = \int \frac{2}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx = 2ln\Big|x-1\Big| - ln\Big|x+2\Big| + C$$

- $\displaystyle\int \frac{-2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1}\, dx$

i) Observar que el integrando es una función racional y que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.
ii) Factorizamos el denominador: $x^3+x^2-x-1 = (x-1)(x+1)^2$. Como en esa factorización el factor lineal $x-1$ aparece sólo una vez y el factor lineal $x+1$ está elevado al cuadrado, podremos determinar constantes A, B y C tales que:

$$\frac{-2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

iii) Para determinar esas constantes efectuamos la suma en el segundo miembro y planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\frac{-2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2+(2A+B)x+(A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Para que la igualdad se cumpla, debe ser:

$$\begin{cases} A+C=-2 \\ 2A+B=4 \\ A-B-C=2 \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones se tiene: $A=1$; $B=2$ y $C=-3$ de modo que :

$$\int \frac{-2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}\right] dx =$$
$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{3}{(x+1)}\,dx =$$
$$= ln\left|x-1\right| - \frac{2}{x+1} - 3\,ln\left|x+1\right| + C$$

- $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-5}{x^3+3x^2+x+3}\,dx$

  i) Observamos que el integrando es una función racional y que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.
  ii) Factorizamos el denominador: $(x+3)(x^2+1)$ Como en esa factorización aparece el factor lineal $x+3$ y el factor cuadrático x^2+1 podremos determinar constantes A, B y C tales que:

$$\frac{2x^2+x-5}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

  iii) Efectuando la suma en el segundo miembro y resolviendo un sistema de ecuaciones como hicimos en los ejemplos anteriores obtenemos: $A=1$, $B=1$; $C=-2$ de modo que:

$$\int \frac{2x^2+x-5}{x^3+3x^2+x+3}\,dx = \int \left[\frac{1}{x+3}+\frac{x-2}{x^2+1}\right] dx =$$
$$= \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$
$$= ln\left|x+3\right| + \frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right| - 2arctgx + C$$

.

- $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+2x^2+1}\,dx$

$$\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+2x^2+1}=\frac{x^3+x^2+3x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D}{(x^2+1)^2}$$

entonces:

$$\begin{cases} C=1\\ D=1\\ A+C=3\\ B+D=3 \end{cases}$$

por lo que $A=2\ \ y\ \ B=2$, de modo que:

$$\int \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+2x^2+1}\,dx=\int\left[\frac{2x+2}{(x^2+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}\right]\,dx=$$

$$=\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx+\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx+\int \frac{x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Resolvemos a continuación la segunda de esas integrales y dejamos las otras a manera de ejercicio:

haciendo $x=tgu$, resulta: $dx=sec^2u\ du$ y además:
$1+x^2=1+tg^2u=sec^2u$, de modo que:

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx=2\int \frac{1}{sec^4u}sec^2du=2\int cos^2u\ du=\int[1+cos2u]\ du=$$

$$=u+\frac{sen2u}{2}+C=u+senu\ cosu+C=u+tgu\ cos^2u+C=$$

$$=u+tgu\ \frac{1}{sec^2u}+C=u+tgu\ \frac{1}{1+tg^2u}+C=arctgx+\ \frac{x}{1+x^2}+C$$

¿Cómo procedemos cuando $grado(P)\geq grado(Q)$? En ese caso, para integrar el cociente de polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ procederemos primero a dividir: $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ donde $grado(R)<grado(Q)$ entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\quad\therefore\quad\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

1.13.1. Ejercicios

1. Integrar:
   i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$ ii) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$
2. Explicar cómo se aplica el método de descomposición en fracciones simples en las siguientes integrales:
   i) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3}\,dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{-x^3+2x^2+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

Comentario final: La primitiva de muchas funciones elementales no es ninguna *función elemental* (funciones elementales son todas las funciones que ustedes conocen y las que se pueden obtener a partir de ellas por medio de suma, resta, multiplicación, división o composición) . Por ejemplo, no existe una función elemental $F(x)$ que sea primitiva de $f(x)=e^{x^2}$. ¡No estamos diciendo que $f(x)=e^{x^2}$ no tiene primitivas! $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ es una primitiva de $f(x)=e^{x^2}$ (¿cierto?), lo que afirmamos es que ninguna primitiva de $f(x)=e^{x^2}$ es una función elemental. Otras funciones cuyas primitivas no son funciones elementales son, por ejemplo: $\dfrac{e^x}{x}$, $\dfrac{senx}{x}$, $sen(x^2)$, $\dfrac{1}{lnx}$, $\sqrt{x^3+1}$, (¿pueden mostrar una primitiva de cada una de estas funciones?)

Capítulo 2

Integral impropia. Sucesiones y series numéricas

2.1. Integral Impropia

Definición de Integral Impropia

Son integrales en las que el dominio de integración no es acotado, y/o en las que el integrando no es una función acotada en el dominio de integración. Son de la forma:

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ donde a es un número real fijo y $f(x)$ es una función continua en $[a, +\infty)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ donde a es un número real fijo y $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, a]$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ siendo f una función continua en $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx$ donde $f(x)$ es una función continua en $(a, b]$ y $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx$ donde $f(x)$ es una función continua en $[a, b)$ y $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$
- $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx$ siendo f una función continua en $[a, c)$ y en $(c, b]$, con $\displaystyle\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$

Así por ejemplo, son integrales impropias:

$\int_0^{\infty} xe^{3-x}dx$ (El integrando es una función continua en el dominio de integración pero este, es no acotado)
$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ (La función a integrar tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$, dado que $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. El valor $x = 1$ punto que se encuentra en el extremo izquierdo del intervalo acotado de integración.)

En el caso que se le pueda asignar un valor finito a una integral impropia, diremos que converge. Caso contrario diverge.

¿Cómo estudiaremos la convergencia de una integral impropia?

- Caso $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ donde a es un número real fijo y $f(x)$ es una función continua en $[a, +\infty)$. (Intervalo no acotado)
  Se evalúa la integral definida $I(b) = \int_a^b f(x)dx$. Si existe y es finito el
  $$\lim_{b\to+\infty} I(b) = I$$
  en ese caso se dice que la integral impropia es convergente y se le asigna el valor $\int_a^{+\infty} f(x)dx = I$

  De manera análoga se analiza la convergencia o divergencia de la integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ donde a es un número real fijo y $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, a]$.

- Caso $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ siendo f una función continua en $\mathbb{R}$ (Intervalo no acotado).

  Analizaremos, para algún número real a , las integrales impropias $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Si ambas integrales son convergentes y convergen a números I_1 e I_2 diremos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente , que converge a $I_1 + I_2$ y que podemos asignarle ese valor.

Si $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ es divergente o $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ es divergente entonces diremos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es divergente. O sea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = I_1 \;\wedge\; \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = I_2$$

- Caso: $\int_{a}^{b} f(x)dx$ donde $f(x)$ es una función continua en $(a,b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (Existencia de una asíntota vertical en $x = a$.)

  Se evalúa la integral definida $I(c) = \int_{c}^{b} f(x)dx$ para c un valor tal que $a < c < b$.

  Si existe y es finito el

  $$\lim_{c\to a^+} I(c) = I$$

  en ese caso se dice que la integral impropia es convergente y se le asigna el valor $\int_{a}^{b} f(x)dx = I$

  De manera análoga se estudia la convergencia o divergencia de la integral impropia de la forma $\int_{a}^{b} f(x)dx$ donde $f(x)$ es una función continua en $[a,b)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Existencia de una asíntota vertical en $x = b$.

- Caso: $\int_{a}^{b} f(x)dx$ siendo f una función continua en $[a,c)$ y en $(c,b]$, con
  $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ (Existencia de una asíntota vertical en $x = c$, $a < c < b$.)

  Analizaremos las integrales impropias $\int_{a}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{b} f(x)dx$. Si ambas integrales son convergentes y convergen a números I_1 e I_2 diremos que $\int_{a}^{b} f(x)dx$ es convergente , que converge a $I_1 + I_2$ y que podemos asignarle ese valor.

  Si $\int_{a}^{c} f(x)dx$ es divergente o $\int_{c}^{b} f(x)dx$ es divergente entonces diremos que $\int_{a}^{b} f(x)dx$ es divergente.

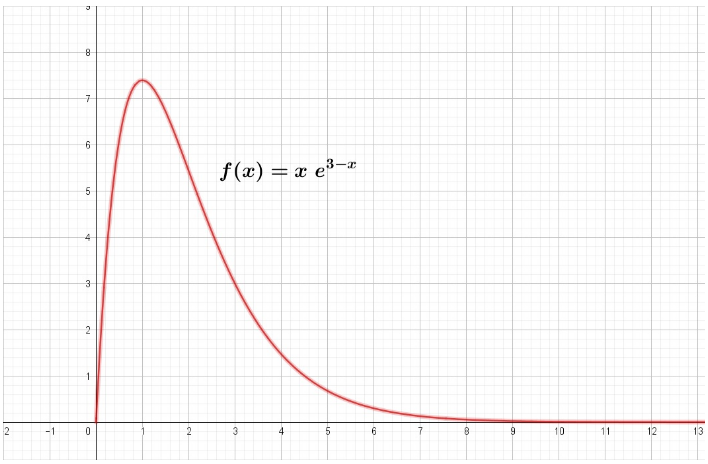
- Para este capítulo puedes utilizar varias de las aplicaciones creadas en **GeoGebra**.

Actividad:
Supongan que en una empresa se estima que, al cabo de x semanas de iniciada una operación, se estará recaudando a razón de $f(x) = xe^{3-x}$ millones de pesos por semana. Siendo así, calculen la recaudación total de las tres primeras semanas y piensen cómo expresarían la recaudación total si el tiempo fuese ilimitado (y cómo la calcularían).

Ejemplos

- $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{3-x}dx$

  Observamos que el integrando $f(x) = xe^{3-x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y positiva.

  Por lo tanto, siendo $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, podemos calcular $\displaystyle\int_0^b xe^{3-x}dx$ aplicando la regla de Barrow:

  $$F(b) = \int_0^b xe^{3-x}dx = [-e^{3-x} - xe^{3-x}]\Big|_0^b = -e^{3-b} - b\,e^{3-b} + e^3$$

  Tal integral, en este caso, calcula el área encerrada entre el eje x, la función f para x entre 0 y b.

Como $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{3-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(-e^{3-b} - b\, e^{3-b} + e^3) = e^3$

decimos que la integral impropia $\int_0^\infty xe^{3-x}dx$ *es convergente*, que *converge a* e^3, y que *podemos asignar a esa integral impropia* el valor e^3, o sea:

$$\int_0^\infty xe^{3-x}dx = e^3$$

(Podríamos estar mencionando en este caso que el área infinita, existe, y es e^3.

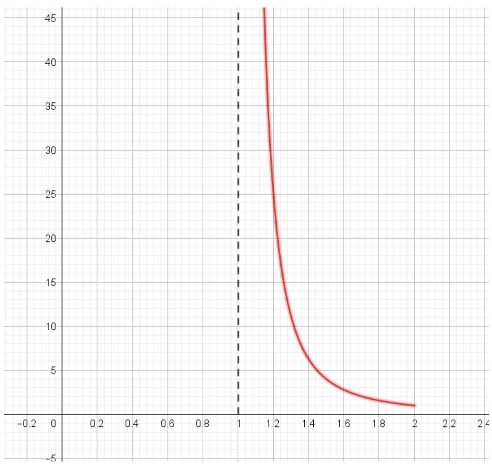
- $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $[1, \infty]$. Calculemos $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\sqrt{b} - 2$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(2b-2) = +\infty$

concluimos que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es *divergente* y *no podemos asignarle un valor.*

- $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$



$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ es una función continua en $(1,2]$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Siendo $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c < 2$, podemos calcular $\displaystyle\int_c^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$$\int_c^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}\bigg|_c^2 = -1 + \frac{1}{c-1}$$

Como $\displaystyle\lim_{c \to 1^+} \int_c^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{c \to 1^+} (-1 + \frac{1}{c-1}) = +\infty$ concluimos que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ *es una integral impropia divergente*. No podemos asignar un valor a esa integral.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es una integral impropia pues $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

  $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es una función continua en el intervalo $(0,1]$ de modo que, para $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < 1$ podemos calcular $\displaystyle\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\bigg|_c^1 = 2 - 2\sqrt{c}$$

  Como $\displaystyle\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$

  concluimos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es una integral impropia convergente , que converge a 2 y podemos asignarle ese valor, o sea:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

2.1.1. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, expliquen por qué la integral es impropia, analicen si se le puede asignar un valor y, cuando corresponda, indiquen cuál es ese valor.

   a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x dx$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ g) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ h) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ j) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x}{(x^2-4)^2}dx$ k) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}dx$ l) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}dx$

2. Expliquen por qué $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} cosx\ dx$ es una integral impropia divergente.

3. Muestren que: a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{4x^2-1}dx = \frac{ln(3)}{2}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \pi$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$

   e) si $a > 0$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$ f) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{5-x}}dx = \frac{44}{3}$

   g) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx = \sqrt{24}$ h) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

2.2. Sucesiones numéricas

La palabra *sucesión* tiene en Matemática un significado que concuerda con el del lenguaje corriente: se trata de un conjunto de objetos dispuestos en un orden determinado, de manera que hay uno que ocupa el primer lugar, uno que ocupa el segundo lugar,etc.
Hay sucesiones *finitas* (que empiezan y terminan) y sucesiones *infinitas*.
Si a cada $n \in \mathbb{N}$ está asociado un número real a_n entonces se dice que el conjunto ordenado

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3,\ \ldots, a_n, \ldots$$

define una *sucesión numérica infinita*. Decimos que a_1 es el *primer término* de esa sucesión, a_2 es el *segundo término*, etc.
a_n es el *término enésimo* de esa sucesión y, para cada n, a_{n+1} es el término siguiente al término a_n.
Para definir una sucesión numérica debe quedar establecido, de alguna manera, qué número es el que está en cada lugar de la lista. Frecuentemente se define una sucesión dando alguna regla o fórmula para el término enésimo, por ejemplo:

$$a_n = \frac{1}{n^3},\ \ n \in \mathbb{N}$$

define la sucesión:

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ \ldots$$

A veces hay dos o más fórmulas , por ejemplo:

$$a_{2n-1} = 0 \ ; \ a_{2n} = 1, \ \ n \in \mathbb{N}$$

define la sucesión:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

A veces una sucesión se define dando cuáles son los primeros términos y a continuación una *fórmula de recurrencia* que indica cómo se obtienen los siguientes términos a partir de los anteriores.

Las sucesiones aparecen en infinidad de situaciones y en la realidad también. Son útiles para modelar, describir, y predecir en el tiempo ciertos fenómenos económicos (préstamos, cuotas, intereses bancarios), biológicos (crecimiento de bacterias, poblaciones), procesos de producción, entre otros.

Ejemplo de sucesiones:

Sucesión de Fibonacci La sucesión $a_1 = a_2 = 1 \quad ; \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \ para \ \ n \geq 3$

define la que se conoce como *sucesión de Fibonacci* que aparece vinculada a una gran variedad de cuestiones y cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Esta secuencia fue descrita por primera vez en el siglo XIII por el matemático italiano Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci (*(Fibonacci fue un célebre matemático italiano, conocido también como Leonardo de Pisa, que vivió entre 1.170 y 1.250 y a quien se atribuye la introducción en Europa del sistema de numeración indo-arábigo.)*). Sin embargo, la secuencia ya había sido estudiada por matemáticos indios en siglos anteriores.

La sucesión de Fibonacci exhibe muchas propiedades matemáticas interesantes y se encuentra en varias áreas de la naturaleza y las ciencias. Por ejemplo, se puede observar en el crecimiento de las conchas de los caracoles, en la disposición de las hojas en ciertas plantas, en la formación de pétalos de flores e incluso en la estructura de galaxias espirales.

Además, la relación entre los números de Fibonacci también es notable. A medida que los números de la sucesión aumentan, su cociente se aproxima al número áureo o la proporción áurea, denotada por la letra griega (*phi*), que tiene un valor aproximado de 1,61803. Esta proporción áurea se considera estéticamente agradable y se ha utilizado en el diseño de obras de arte, arquitectura y música.

La sucesión de Fibonacci es una de las secuencias más conocidas y estudiadas en matemáticas. Tiene una amplia gama de aplicaciones y es un ejemplo interesante de cómo los patrones matemáticos pueden encontrarse en la naturaleza y el mundo que nos rodea.

Sucesión o progresión aritmética Sea $a_1 = a \quad ; \quad a_n = a_{n-1} + d \;\; para \;\; n \geq 2$

define una sucesión en la que el primer término es a y luego, a partir de $n = 2$, cada término se obtiene sumando un número fijo d al término anterior: $a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \; ...$
La misma sucesión queda definida diciendo:

$$a_n = a + (n-1)d \quad para \; n \geq 1$$

Sucesión o progresión geométrica Sea $a_1 = a \;\; ; \;\; a_n = a_{n-1}\, r \;\; para \;\; n \geq 2$ define una sucesión en la que el primer término es a y luego, a partir de $n = 2$, cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo $r \neq 0$: $\quad a, \; a\,r, \; a\,r^2, \; a\,r^3 \; ...$
La misma sucesión queda definida diciendo:

$$a_n = a\,r^{n-1} \;\; para \; n \geq 1.$$

Notación general de una sucesión $\{a_n\} \;\; , \; \{a_n\}_n \;\; , \; \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ son notaciones que se utilizan para indicar la sucesión cuyo término enésimo es a_n.
Por ejemplo: $\{(-1)^n\} \;\; , \; \{n^3\}_n \;\; , \; \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Convergencia de sucesiones

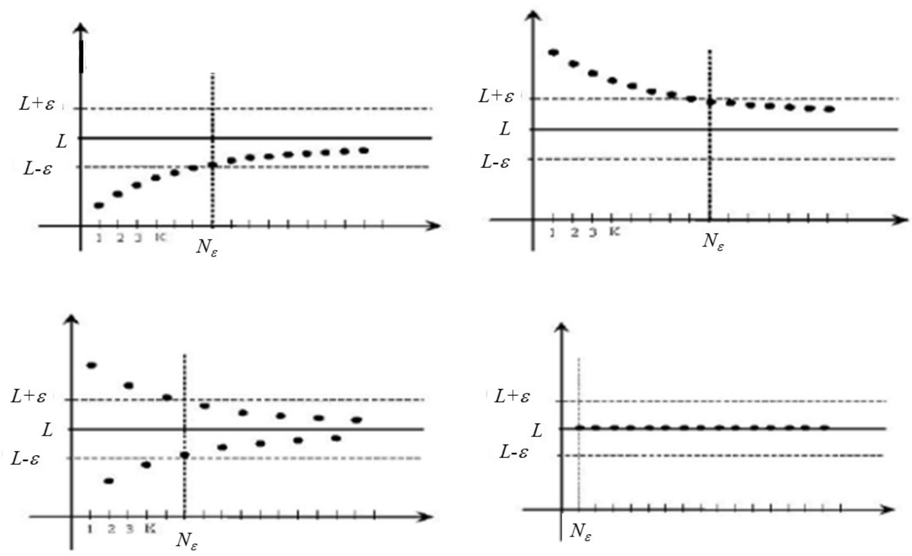
Decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión *convergente* y que *converge a* L cuando $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Esto significa que los términos de la sucesión se acercan tanto como se quiera a L considerando valores de n suficientemente grandes.
Cuando esto no sucede decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es *divergente*.

Ejemplos:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ por lo que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es convergente (converge a 0).

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ de modo que la sucesión $\{n^3\}$ es divergente.
$\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ no existe de modo que la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente.

Las figuras siguientes ilustran varias maneras en las que una sucesión puede ser convergente:



Observamos que si $\{a_n\}$ converge a L entonces, para $\epsilon > 0$ cualquiera, todos los términos a_n excepto eventualmente un número finito de ellos (que corresponden a $n < N_e$) están en el intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.

Sucesiones monótonas

Una sucesión $\{a_n\}$ es *creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.

Una sucesión $\{a_n\}$ es *decreciente* si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.

Las sucesiones crecientes y las sucesiones decrecientes se llaman *monótonas*. La convergencia o divergencia de una sucesión monótona se puede determinar con un criterio sencillo:

Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada, o sea, si y sólo si existe un número positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

Ejemplo:
Sea por ejemplo la sucesión $\left\{ \dfrac{ln(n)}{n} \right\}$ es una sucesión decreciente a partir de $n = 3$, o sea,

$$\frac{ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{ln(n)}{n} \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

Para probarlo podemos estudiar la función $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$.

f es continua en $(0, +\infty)$ y es derivable.

$$f'(x) = \frac{1 - lnx}{x^2} < 0 \quad si \quad x > e$$

de modo que $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$ es decreciente (estrictamente) cuando $x > e$

y por lo tanto , $\left\{ \dfrac{ln(n)}{n} \right\}$ es decreciente si $n \geq 3$.

Vamos a definir ahora una sucesión que se denomina factorial.

Factorial

Se define el factorial como una sucesión numérica que le asigna a cada número natural n el producto de todos los naturales desde 1 hasta n. Esto se anota del siguiente modo utilizando el símbolo !. Es decir:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

para todo natural $n \geq 1$. Y se define

$$0! = 1$$

El factorial, también se puede definir recursivamente como $n! = n(n-1)!$ para $n \geq 1$ y $0! = 1$.

Así, se construye la sucesión, $n! = 0!, 1!, 2!, 3!, ...$ donde,

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

y así se sigue.

La sucesión $n!$ es claramente creciente, y por ejemplo la sucesión $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ es decreciente. Ya que para todo n es $\quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{n!}$

2.2.1. Ejercicios

1. Escriban los cuatro primeros términos de las sucesiones que se definen a continuación: i) $a_n = 3^n$, $n \geq 1$ ii) $b_n = (-1)^n n^2$, $n \geq 1$ iii) $c_1 = 1$ y $c_n = c_{n-1} + 3$, $n \geq 2$

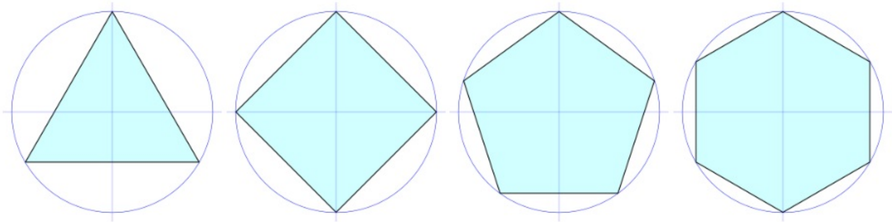
2. Escriban una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones: i) $1, 2, 4, 8, 16, ...$ ii) $1, 8, 27, 64, 125, ...$ iii) $2, 5, 8, 11, 14, ...$ iv) $3, -9, 27, -81, 243, ...$

3. Analice si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes:
i) $\left\{\frac{10}{\sqrt{n+1}}\right\}$ ii)$\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$ iii)$\left\{\frac{3n-2}{6n+1}\right\}$ iv) $\left\{\frac{3-2^{-n}}{6+4^{-n}}\right\}$

   v) $\left\{\frac{ln(n)}{n}\right\}$ vi)$\{cos(n\pi)\}$ vii)$\{sen(n\pi)\}$ viii)$\{n^3e^{-n}\}$

   ix) $\{r^n\}$ (consideren los casos:$|r| > 1$, $|r| < 1$ y $|r| = 1$)

4. Los matemáticos griegos, en tiempos remotos, dieron respuesta al problema del cálculo del área del círculo considerando una sucesión de polígonos inscriptos cuyas áreas, al aumentar suficientemente el número de lados, representan prácticamente el área buscada. Consideremos la sucesión de $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$,. . donde P_n es un polígono regular con n lados (n mayor o igual a 3), inscripto en un círculo de radio 1.



Es posible probar que el área de un polígono regular de n lados, conociendo su radio r es:

$$Area(n) = \frac{nr^2 \sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$$

De este modo se genera la sucesión de los valores del área de un polígono regular de n lados, para n mayor a 3. Tomar límite a este último valor para n acercándose al infinito, y $r = 1$, para obtener finalmente que dicha sucesión

$$Area(n) = \frac{n \sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$$

converge al número π, área de un círculo de radio 1.

2.3. Series numéricas

Serie numérica

Dada la sucesión numérica $\{a_n\}$, el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ denota lo que llamamos *serie numérica*. Informalmente podríamos decir entonces que una serie numérica es una suma de infinitos sumandos: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$
pero es necesario precisar en qué sentido podemos hablar de *suma* en este contexto.

Sucesión de Sumas Parciales

Dada $\{a_n\}$ podemos sumar un número finito de términos sucesivos y formar una nueva sucesión denominada Sumas Parciales $\{S_n\}$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad ; \quad n \geq 1$$

Es la sucesión $\{S_n\}$ lo que se llama serie numérica y se representa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición de convergencia de una serie

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y converge a S o tiene suma igual a S cuando la sucesión de Sumas Parciales $\{S_n\}$ converge a S.
Es decir que, existe el límite $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, y en este caso se anota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Por el contrario, si $\{S_n\}$ no converge decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y que no tiene suma.

Ejemplos:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ es convergente y su suma es $\frac{1}{3}$.

  En efecto: $\quad S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}$

  por lo tanto $\frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots + \frac{3}{10^{n+1}}$

  Entonces $\quad S_n - \frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$ de donde

  $$S_n = \frac{\frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} c$ con $c \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ son series divergentes.

  En efecto:

  En el primer caso, $S_n = nc$ así que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (si $c > 0$) o $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ (si $c < 0$).

  En el caso de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ resulta $S_n = \begin{cases} -1 & si\ n\ es\ impar \\ 0 & si\ n\ es\ par \end{cases}$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe.

Propiedad de las series convergentes:
Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y α y β dos constantes. Entonces, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y su suma es igual a $\alpha A + \beta B$ donde A es la suma de la serie de términos a_n y B es la suma de la serie de términos b_n.

Demostración:
Por las propiedades de las sumas finitas podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B$ y entonces, por propiedades de los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \alpha A + \beta B$$

Como corolario de la propiedad anterior resulta:
Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.
Atención:

Siendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ambas divergentes, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ podría ser convergente o divergente, como se ve en los siguientes ejemplos:

- *si* $a_n = 1$ *y* $b_n = -1 \; \forall n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambas divergentes y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente.
- *si* $a_n = 1$ *y* $b_n = 1 \; \forall n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambas divergentes y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.

2.4. Serie geométrica

La serie geométrica resulta de sumar los términos de una progresión o sucesión geométrica. Los términos de una sucesión de este tipo son de la forma:

$$a; ar; ar^2; ar^3; ...$$

Notar que el cociente de cada término con su inmediato anterior es siempre constante e igual a r.

Serie geométrica de razón r

Si r es un número real fijo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \ = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

es una *serie geométrica de razón* r y primer término a.

Las series geométricas son las series infinitas más simples y pueden ser utilizadas como una introducción básica a la Serie de Taylor y Serie de Fourier, que estudiarán en Matemática C.

Como veremos a continuación, la convergencia o divergencia de una serie de este tipo depende de r.

En este caso es

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + ar$$

$$S_3 = a + ar + ar^2$$

en general

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

<u>Si $r = 1$</u> entonces $S_n = an$ por lo que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ y la serie diverge.
<u>Suponiendo $r \neq 1$</u>, podemos escribir:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

Entonces, $\quad |r| < 1 \to \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

$|r| > 1$ o $r = -1 \to \lim_{n\to\infty} S_n$ no es un número real.

Si $|r| \geq 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Suma de una serie geométrica

Si $|r| < 1$ la serie geométrica converge y su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^{n+1}}/ = 1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots.$ es geométrica con razón $r = \frac{2}{3}$ y primer término $\frac{1}{3}$, entonces es convergente ya que el módulo de r es menor a 1 y su suma es $\dfrac{1/3}{1-2/3}$

2.5. Serie telescópica

Dada una sucesión $\{b_n\}$, la serie de términos $a_n = b_n - b_{n+1}$ es una serie *telescópica*.

En este caso es $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$
de modo que $\{S_n\}$ converge si y sólo si $\{b_n\}$ converge y, siendo así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - L \quad \textit{donde} \quad L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplo:
El comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$ puede estudiarse observando que
$a_n = \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{4n+2}$ (verifíquenlo),
o sea que $a_n = b_n - b_{n+1}$ siendo $b_n = \dfrac{1}{4n-2}$
Por lo tanto, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 - b_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n+2}$

y resulta: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$

Luego, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ converge a $\dfrac{1}{2}$.

2.5.1. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, estudien el comportamiento de la serie y hallen su suma cuando sea posible.

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^n}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$

   v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$ vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

   viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{7^n}$ ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{6^n}$ x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$

2. Muestren que $2,999... = 3$

3. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15m sobre una losa de concreto. La pelota alcanza una altura igual a los dos tercios de la altura anterior en cada rebote. Hallen la expresión de la altura en su enésimo rebote. Calculen cuál sería la suma de los metros recorridos suponiendo que la pelota rebotara indefinidamente.

4. Hallen la suma de la serie $4-6+\pi+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...\dfrac{1}{2^n}+...$

2.6. Criterios de convergencia

No siempre es posible establecer la convergencia o divergencia de una serie de manera directa, como lo hicimos con las series geométricas y las telescópicas, considerando las sumas parciales y analizando si tienden, o no, a un límite finito cuando n tiende a infinito. En general, con escasa frecuencia podremos estudiar el comportamiento de una serie de esta manera. De allí la importancia de contar con *criterios* de convergencia que permitan eludir la expresión de las sumas parciales y la evaluación de su límite. Estudiaremos a continuación algunos de estos criterios.

Importante: Estos criterios sólo dan condiciones suficientes que bajo ciertas condiciones aseguran la convergencia y/o divergencia de una serie.

2.6.1. Criterio de divergencia

Condición necesaria para la convergencia
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración:
Sea $\quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ pues $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es por hipótesis convergente.
También es entonces $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ y por lo tanto:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$

Importante: el contra recíproco del enunciado anterior, es útil y se enuncia del siguiente modo.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Esto se conoce como Criterio de la divergencia.

Ejemplo: Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+5}$, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1-\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{5}{n})} = 1$$

por lo tanto, en virtud de la condición necesaria para la convergencia, concluímos que la serie dada es divergente (si fuera convergente el límite anterior debería ser igual a 0).

Atención: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prueba de ello es por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que, como veremos, diverge, siendo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

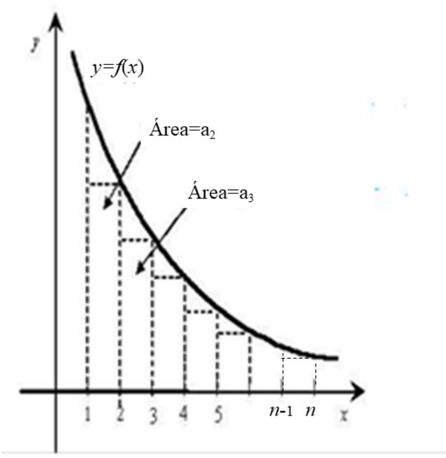
2.6.2. Criterio de la integral

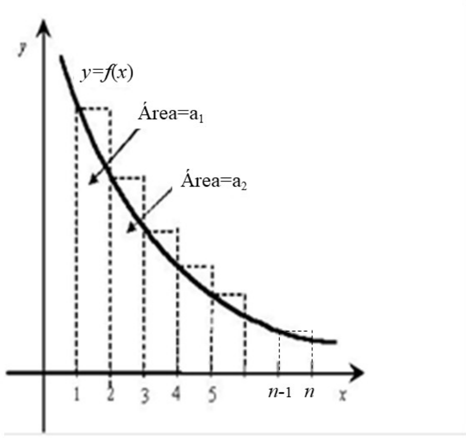
Sea f una función continua, decreciente y positiva para $x \in [1, +\infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ converge \ \ \ si\ y\ sólo\ si \ \ \ \int_1^{+\infty} f(x)dx \ \ converge.$$

Demostración: Como puede apreciarse en los siguientes gráficos, si f satisface las hipótesis del enunciado, debe ser:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$





Las sucesiones $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ e $I_n = \int_1^n f(x)dx$ son crecientes y se tiene entonces:

Si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge a un número A, entonces, para todo n, $S_n - a_1 = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq A$ de modo que $\{S_n\}$ es acotada y por lo tanto convergente.

Recíprocamente, si $\{S_n\}$ converge a un número S, entonces, para todo n, resulta $\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S_{n-1} \leq S$ y esto conduce a concluir que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.

2.6.3. Series-p o p-series

Aplicaremos el criterio de la integral al comportamiento de las *p-series*.

p-Series

Las p-series (o *series p*) son las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

con $p > 0$. Para el caso de $p = 1$ se denomina *serie armónica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3 + ...$$

Siendo $p > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es continua, positiva y decreciente en $[1, +\infty)$. Además, $a_n = \dfrac{1}{n^p} = f(n)$.

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b = \dfrac{b^{1-p}-1}{1-p} & si\ p \neq 1 \\ \\ ln\ |x|\Big|_1^b = ln\ b \quad si\ p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}\ si\ p > 1 \\ +\infty\ \ si\ \ p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx : \begin{cases} converge\ si\ p > 1 \\ diverge\ \ si\ \ p \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, por el criterio de la integral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} converge\ si\ p > 1 \\ diverge\ \ si\ \ p \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo: Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ son divergentes, mientras $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ son convergentes.

2.6.4. Criterio de comparación

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces también es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración:
Sea $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ y sea S la suma de la serie de términos $\{b_n\}$
Para todo n es:

$$0 \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} b_k \leq S$$

De modo que $\{S_n\}$ es una sucesión creciente y acotada y por lo tanto, convergente.

Ejemplos:

- Dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(\frac{1}{n})}{n^2+1}$, observamos que para todo n es $0 < \frac{1}{n} < 1 < \frac{\pi}{2}$, por lo que $0 < cos(\frac{1}{n}) < 1$ y se verifica entonces: $0 \leq \frac{cos(\frac{1}{n})}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (es una p-serie con $p > 1$). Entonces, por el criterio de comparación, concluímos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(\frac{1}{n})}{n^2+1}$ es convergente.

- Dada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{2n}}$, observamos que para todo n es $2n > \sqrt{2n}$ y por lo tanto $0 < \dfrac{1}{n+2n} < \dfrac{1}{n+\sqrt{2n}}$. Como sabemos, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por lo que también diverge, por propiedad de las series, la serie de términos $a_n = \dfrac{1}{n+2n} = \dfrac{1}{3n} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{n}$. Entonces por el criterio de comparación, concluímos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{2n}}$ debe ser divergente.

Nota: Si se suprime un número finito de términos del comienzo de una serie, la convergencia o divergencia no cambia. Por lo tanto el criterio de comparación es válido si la desigualdad $0 \leq a_n \leq b_n$ se verifica para todo $n \geq N_0$ siendo N_0 algún número natural (una observación similar corresponde también hacer en los otros criterios).

2.6.5. Criterio del cociente

Sea $\{a_n\}$ tal que $a_n > 0$ para todo n y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

Entonces: i) Si $L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $L > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $L = 1$ el criterio no decide.

Ejemplo:

Veamos si es posible determinar el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ aplicando el criterio del cociente:

$a_n = \dfrac{n^2}{3^n} > 0$ para todo n y $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}} : \dfrac{n^2}{3^n} = \dfrac{(n+1)^2}{3n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{3\cancel{n^2}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Entonces, por el criterio del cociente, concluimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ converge.

2.6.6. Criterio de comparación en el límite

Si $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo n y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(Omitimos las demostración en este criterio y en los que siguen).

Ejemplo: Para estudiar el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2+1}$ observemos que $\quad 0 < a_n = \dfrac{2n+3}{5n^2+1} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n^2}}\right)$

Sea $b_n = \dfrac{1}{n}$. $\quad b_n > 0$ para todo $n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{2}{5} > 0$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Entonces, por el criterio de comparación en el límite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2+1}$ es divergente.

2.6.7. Criterio de la raíz (optativo)

Sea $\{a_n\}$ tal que $a_n \geq 0$ para todo n y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Entonces: i) Si $L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $L > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $L = 1$ el criterio no decide.

Ejemplo: Sea $a_n = \left[\dfrac{1}{ln(n)}\right]^n$.

$$a_n = \left[\frac{1}{ln(n)}\right]^n \geq 0 \ \ \forall n \geq 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n)} = 0 < 1.$$

Entonces, por el criterio de la raíz, la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{ln(n)}\right]^n$ converge.

2.7. Convergencia absoluta

Las técnicas desarrolladas para determinar la convergencia de series de términos positivos, vamos a aplicarlas para series de términos positivos y negativos. Tal aplicación es posible por el teorema siguiente. Como veremos a continuación, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia.

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ también converge. Además, se dice en este caso que la serie es absolutamente convergente.

Demostración:
Sea $b_n = a_n + |a_n|$
Para todo n es $b_n \geq 0$ y $b_n \leq 2|a_n|$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ se supone convergente, por propiedad de las series es convergente la serie de términos $2|a_n|$ y, por el criterio de comparación, también converge la serie de términos b_n. Luego, siendo $a_n = b_n - |a_n|$, otra vez por propiedad de las series, se concluye que la serie de términos a_n es convergente.

Ejemplo de esto es la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n)}{n^2}$, cuyos términos son positivos y negativos. Esta serie es convergente ya que la serie de los módulos, es una serie p con $p = 2$, que es convergente. Por lo tanto la serie también lo es.

2.8. Series alternadas

Serie alternada

Una serie alternada es una serie infinita de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ para todo n.

Veamos como analizar la convergencia de estas series. Por un lado, si la serie en módulo converge, la serie alternada también converge y en este caso se dice que la serie es *absolutamente convergente*.

Pero en el caso que la serie de los módulos diverge, no se sabe si la serie alternada converge o no. En este caso, podemos analizar la convergencia por el siguiente criterio.

Criterio de Leibniz

Sea $\{a_n\}$, tal que $a_n > 0$ para todo n, si $\{a_n\}$ decreciente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la *serie alternada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.

Ejemplo: serie armónica alternada
Analizar la convergencia de la serie denominada *serie armónica alternada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - 1/2 + 1/3 - ...$

i) $\frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
ii) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente pues $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
Entonces, por el criterio de Leibniz la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge. Recordar que la serie en módulo es divergente, es una serie p con $p = 1$.

En Matemática C, mediante otras herramientas matemáticas encontrarán el valor al cuál converge la serie armónica alternada. El ejemplo anterior pone en evidencia que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ser divergente. Ejemplo de esto es la serie armónica y la serie armónica alternada. Cuando esto sucede se denomina de la siguiente manera.

Convergencia condicional

Una serie se denomina *condicionalmente convergente* cuando la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

Ejemplo: Para determinar el comportamiento de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ estudiemos primero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-2)^n}{n!}\right|$.

$\left|\dfrac{(-2)^n}{n!}\right| = \dfrac{2^n}{n!} > 0 \ \ \forall n$

$\left|\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\dfrac{(-2)^n}{n!}\right| = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{(-2)^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$. Entonces, por el criterio del cociente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-2)^n}{n!}\right|$ es convergente y por lo tanto también converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

2.8.1. Aproximación de la suma de una serie convergente por una suma parcial

Si se sabe que una serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, se puede tomar una suma parcial $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ como aproximación a la suma S de la serie. Damos a continuación una estimación de la **diferencia o error** $|S - S_n|$.

La propiedad siguiente es muy útil para saber si una suma parcial S_n de una serie alternante convergente, es aceptable o no para aproximar a su suma S.

Propiedad

Si una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ satisface las condiciones del criterio de Leibniz y S es su suma, entonces el error que se comete al aproximar S con la suma parcial S_n es, en valor absoluto, menor o igual que a_{n+1} .
O sea, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Este propiedad permite por un lado, conocer el error cometido al aproximar la suma S de una serie convergente (que en la mayoría de las veces es desconocida) por una Suma parcial. También es útil para estimar la cantidad mínima de términos a sumar para obtener determinado error para estimar la suma S.

2.9. Ejercicios

1. a) Vean si es posible determinar el comportamiento de las siguientes series aplicando la condición necesaria de convergencia.
   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n+3}{n^2+1}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{n} - \frac{1}{2^n}\right)$
   b)Analicen si son convergentes o divergentes las series de los incisos ii) y iii).

2. Estudien el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n}$ aplicando el criterio de la integral.

3. Estudien el comportamiento de las siguientes series aplicando el criterio de comparación.
   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$

4. Estudien el comportamiento de las siguientes series aplicando el criterio de comparación en el límite.
   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

5. Estudien el comportamiento de las siguientes series aplicando el criterio de la raíz. i)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{50}{\sqrt{n}}\right)^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

6. Vean si es posible determinar el comportamiento de las siguientes series aplicando el criterio del cociente. i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

7. Vean si es posible determinar el comportamiento de las siguientes series aplicando el criterio de Leibniz.

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ln(n)}{n}$

8. Muestren que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ es convergente y aproximen su suma con error menor que $\dfrac{1}{1000}$.

9. Analicen si las siguientes series son convergentes o divergentes.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n-1}$ vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$ x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n}$ xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n-5n^2}$

xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10}{4n^5+n^3}$ xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$

xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-1}$ xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^3+5)cos(\frac{1}{n})}{n^2\, 3^n}$ xvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$

10. Analicen si las siguientes series son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{ln(2n)}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+2}{4n-3}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n+1)}$ v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{3^n}$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{3^n}$.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales

Un *modelo matemático* es la traducción al lenguaje matemático de algo que sucede en la realidad; es una descripción (por medio de una función, una ecuación, un sistema de ecuaciones, etc) de un fenómeno del mundo real y que tiene por finalidad comprenderlo y hacer predicciones acerca del comportamiento futuro del mismo. Las ecuaciones diferenciales (cuyo estudio comenzarán ustedes en este capítulo) se presentan como modelo matemático de infinidad de fenómenos en las diferentes ramas del conocimiento, en especial de la ingeniería.

Para obtener un modelo matemático que describa un fenómeno, quizá baste contar con modelos de baja resolución; por ejemplo, en los cursos básicos de física el lector habrá advertido que al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, se hace caso omiso de la resistencia del aire. Pero si el lector es un científico cuyo objeto es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá tener en cuenta la resistencia del aire y demás factores, como la curvatura de la Tierra. Dado que las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más de las variables, el modelo matemático de las hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas. En otras palabras, un modelo matemático puede ser una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales. Una vez formulado un modelo matemático (sea una ecuación diferencial o un sistema de ellas), llegamos al problema de resolverlo, que no es fácil en modo alguno. Una vez resuelto, comprobamos que el modelo sea razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema; entonces, se repiten los pasos del proceso de modelado. Al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que debamos conformarnos con una solución aproximada. A veces, una misma ecuación diferencial puede ser modelo matemático de distintos fenómenos.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de distinto modo, por ejemplo en ordinarias o parciales.

Una *ecuación diferencial ordinaria* es una igualdad que involucra una variable independiente, una función de esa variables y derivadas de esa función respecto de la variable independiente.

Cuando la ecuación involucra a derivadas parciales de una función de varias variables, la ecuación diferencial es de tipo *parcial*.

Además, las ecuaciones ordinarias, se pueden clasificar según el orden, o si son lineales o no lineales. El *orden* de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas involucradas y el *grado* de una ecuación diferencial es el mayor exponente al que aparece elevada la derivada de mayor orden. Así por ejemplo:

- $y'' + (y')^2 + x = cosx$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 y grado 1.

- $(y''')^2 + y'y = x^5$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 3 y grado 2.

- $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ es una ecuación diferencial parcial (ver que aquí la incógnita es una función de dos variables: t y x)

- Las ecuaciones $y' = 2x$ e $y' = x + y$ son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y grado 1. Ecuaciones de ese tipo, orden y grado son las que estudiaremos en este curso.

3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y grado 1 es de la forma:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

donde x es la variable independiente, $y(x)$ es la función, $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ su derivada. También puede escribirse de la forma

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

o

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

En problemas donde la variable independiente modela el tiempo suele utilizarse a t como variable independiente y a $x(t)$ variable dependiente.

Ejemplos son: $y'(x).y(x) = x$, $y' = x + 2y$, $2xdx + ydy = 0$, $x'(t) = -tx(t)$

El objetivo de una ecuación diferencial es lograr encontrar una función $y(x)$ que la verifique.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una solución en un intervalo I es una función $y = \phi(x)$ derivable en I tal que, al reemplazar en la ecuación diferencial $y(x)$ por $\phi(x)$ e $y'(x)$ por $\phi'(x)$ la igualdad se cumple. El intervalo puede ser abierto $I = (a, b)$, cerrado $I = [a, b]$ o $I = (\infty, b)$.

Soluciones explícitas o implícitas. Veremos que según sean los métodos de resolución de una ecuación diferencial de primer orden, se puede obtener la solución en forma explícita, es decir, $y = f(x)$, o en forma implícita $G(x, y) = 0$.

Ejemplo: Verificaremos a continuación que la función $y = 2e^x - x - 1$ es una solución de $y' = x + y$.

Siendo $y = 2e^x - x - 1$ resulta $y' = 2e^x - 1$ $\qquad x + y = 2e^x - 1$
y por lo tanto $y' = x + y$.

En general para resolver la ecuación

$$y' = 2x$$

podemos integrar y obtener como solución no una, sino toda una *familia de funciones* de la variable x

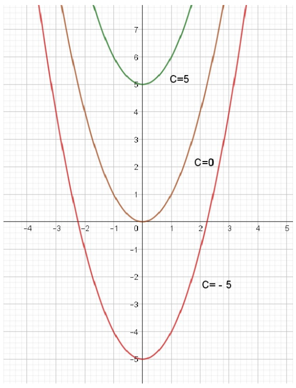
$$y = x^2 + C$$

de un *parámetro* C. Esa familia de funciones es lo que llamamos *solución general* de la ecuación.

Para cada valor determinado de C se obtiene *una solución particular* de la ecuación. Por ejemplo:

$$y = x^2 - 5$$

es una solución particular.



Lo mismo podemos decir para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden cualquiera: la *solución general* es una familia de funciones, de una variable, dependiente de un parámetro tal que, para cada elección de ese parámetro se obtiene una *solución particular*.

La solución general de una ecuación diferencial se presenta a veces definida de un *modo implícito*.

Así por ejemplo:

$yx - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{y^3}{3} = C$ define de manera implícita la solución general de la ecuación $y - x^2 + (x - y^2)y' = 0$. Verifiquemos que eso es cierto:

$$yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = C$$

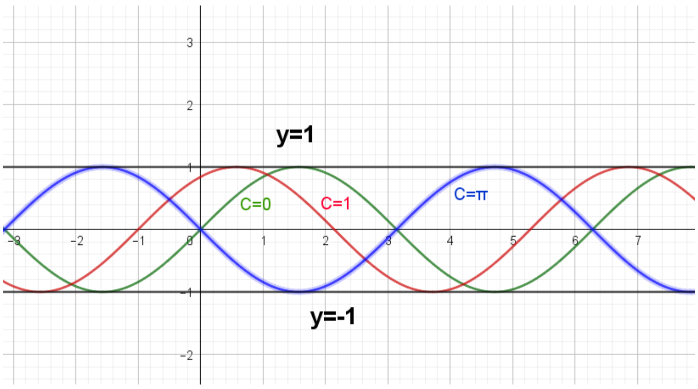
$$y'x + y - x^2 - y^2y' = 0$$

$$y - x^2 + \left(x - y^2\right) y' = 0$$

En ocasiones, una solución de una ecuación diferencial dada no se obtiene a partir de la solución general. Esas soluciones se llaman *singulares*.

Ejemplo 1: Por ejemplo, como pueden ustedes verificar, $y = \left(\dfrac{x-C}{2}\right)^3$ es solución general de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$. También pueden verificar que $y = 0$ es solución de esa ecuación (**solución trivial**), pero vean que, cualquiera sea la elección de C, la función $y = \dfrac{(x-C)^3}{8}$ es diferente de la función $y = 0$, o sea, $y = 0$ es una solución singular de $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ (es solución pero no se obtiene a partir de la **solución general**).

Ejemplo 2: Por ejemplo, la familia de funciones: $y = sen(x+C)$ es *solución general* de la ecuación diferencial $(y')^2 + y^2 = 1$. Una solución particular es, por ejemplo, $y = sen(x)$, o $y = sen(x+1)$. Notar además, que las funciones $y = 1$ e $y = -1$ son soluciones singulares (estas verifican la ecuación diferencial, pero no se pueden encontrar a partir de la familia de soluciones).



Familia de funciones asociada a una ecuación diferencial

Dada una familia de funciones dependiente de un parámetro $y = \varphi(x, C)$ o $\phi(x, y, C) = 0$, llamamos *ecuación diferencial asociada* a aquella que tenga a dicha familia como solución general.

Veremos en los siguientes ejemplos cómo hallamos la ecuación diferencial asociada a una familia dada.

Ejemplos:

- Para hallar la ecuación diferencial asociada a $y = Cx^2$ el primer paso es derivar: $y' = 2Cx$. A continuación, a partir de $\begin{cases} y = Cx^2 \\ y' = 2Cx \end{cases}$ tendremos que deducir una tercera ecuación en la que no aparezca C. En este caso, por ejemplo:

$$y' = 2Cx \to y'x = 2Cx^2 \to y' = \frac{2y}{x}$$

es la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas con vértice en $(0, 0)$.

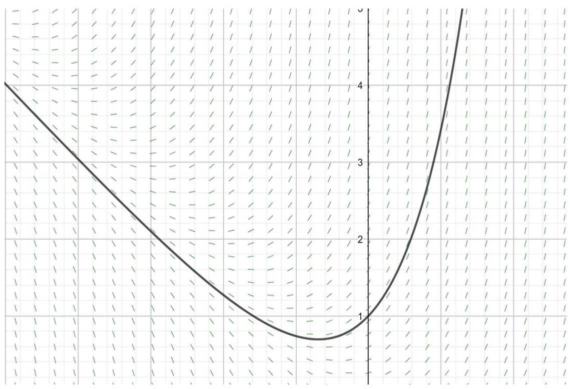
- Dada la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C$ para hallar la ecuación diferencial asociada bastará con derivar de manera implícita: $2x + 2yy' = 0$ o sea:

$$x + yy' = 0$$

es la ecuación diferencial asociada a tal familia.

Campo de direcciones Dada $y' = f(x, y)$, si en diferentes puntos (x, y) de un sistema de coordenadas cartesianas trazamos pequeños segmentos con pendiente igual a $f(x, y)$ obtenemos lo que se llama *campo direccional* o *campo de pendientes* de esa ecuación diferencial. Los segmentos del campo direccional de $y' = f(x, y)$ son tangentes a las curvas correspondientes a las soluciones de esa ecuación diferencial y su observación puede ayudarnos a reconocer dichas curvas.

La siguiente imagen fue obtenida usando los comandos *CampoDirecciones* y *ResuelveEDO* en *GeoGebra* y muestra el campo direccional de $y' = x + y$ y la curva de ecuación $y = 2e^x - x - 1$ (una solución de esa ecuación diferencial).



3.1.1. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, verificar que la función dada es solución de la ecuación diferencial que la acompaña.
   i) $y = \dfrac{senx}{x} \quad ; \quad xy' + y = cosx$
   ii) $y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^{x} \quad ; \quad y' + 2y = e^{x}$
   iii) $y = 2 + C\sqrt{1+x^2} \quad ; \quad (1+x^2)\,y' - xy = -2x$
   iv) $y = e^{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt + Ce^{x} \quad ; \quad y' - y = e^{x+x^2}$
   v) $y = x\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad yy' = x - 2x^3$
   vi) $y = x\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx \quad ; \quad xy' - y = xe^{x}$
2. Obtener la ecuación diferencial asociada a:
   i) $y = Cx$ ii) $y = Csenx$ iii) $y = sen\,(x+C)$ iv) $x^2 + 2y^2 = C$
   v)$xy = C$ vi)$x^2 - y^2 = C$ vii) $y^2 = Cx^3$ viii)$y = Ce^{-x}$

Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Métodos analíticos

A continuación estudiaremos algunos **métodos** que permiten encontrar la **solución analítica** de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Las soluciones analíticas implican encontrar una expresión matemática exacta para la función desconocida que satisface la ecuación diferencial. Estas soluciones proporcionan una comprensión profunda del comportamiento de la función en todo el dominio de la variable independiente. Sin embargo, encontrar soluciones analíticas es posible sólo para un conjunto limitado de ecuaciones diferenciales. Los métodos que estudiaremos aquí son:

- Método de variables separables
- Diferencial exacta
- Ecuaciones lineales de primer orden

Métodos numéricos

En los casos que no sea posible encontrar una solución analítica, es posible obtener **soluciones numéricas**. Las soluciones numéricas implican aproximar la solución de una ecuación diferencial utilizando métodos numéricos y computacionales. Estos métodos dividen el dominio de la variable independiente en pequeños intervalos y calculan la solución en puntos discretos dentro de cada intervalo. Estos métodos son estudiados en materias más avanzadas, requieren de cálculos computacionales y del uso de algoritmos.

En resumen, las soluciones analíticas proporcionan expresiones matemáticas exactas para la función desconocida, mientras que las soluciones numéricas aproximan la solución utilizando métodos computacionales. Ambos enfoques son importantes y se utilizan en diferentes situaciones dependiendo de la complejidad de la ecuación diferencial y los objetivos del análisis.

3.2. Ecuación diferencial de variables separables

Variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de *variables separables* es aquella que se pueda expresar en la forma

$$p(x)dx = q(y)dy.$$

Siendo así,

$$\int p(x)dx = \int q(y)dy + C$$

define implícitamente la solución general de la ecuación diferencial de la forma

$$P(x) = Q(y) + C$$

siendo $P(x)$ y $Q(y)$ primitivas de las funciones $p(x)$ y $q(y)$.

Notar que la constante de integración sólo basta con colocarla de un miembro de la igualdad.

En efecto: derivando respecto de x la última igualdad resulta

$$p(x) = q(y)y'$$

de modo que $p(x) + q(y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ y entonces $p(x)dx = q(y)dy$ (o sea, la igualdad expresada en la ecuación diferencial se cumple).

Ejemplos:

- La ecuación $2xdx + ydy = 0$ tiene la forma $p(x)dx = q(y)dy$.
  La solución general queda definida implícitamente por
  $\int 2x\, dx = \int y\, dy + C$ o sea: $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = C$.

- $3e^x tgy + y'\,(2 - e^x)\, sec^2 y = 0$ puede expresarse en la forma
  $3e^x tg(y)\; dx = -\,(2 - e^x)\, sec^2 y\; dy$, suponiendo $(2 - e^x)\, tgy \neq 0$,
  se pueden separar las variables dividiendo por esa expresión ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{3e^x}{2 - e^x}\; dx = -\frac{sec^2 y}{tg(y)}\; dy$$

A continuación se integra para obtener

$$3ln\Big|2 - e^x\Big| = ln\Big|tg(y)\Big| + C_1$$

La expresión del renglón anterior define implícitamente la solución general de la ecuación diferencial. Podemos aplicar las propiedades de los exponentes y logaritmos para simplificar esa expresión:

$$ln\Big|\frac{tg(y)}{(2 - e^x)^3}\Big| = C_1$$

$$\Big|\frac{tg(y)}{(2 - e^x)^3}\Big| = e^{C_1}$$

$$\frac{tgy}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1}$$

lo que podemos escribir en la forma: $\dfrac{tg(y)}{(2 - e^x)^3} = C$ con $C \neq 0$

Observamos además que $tg(y) = 0$ también define soluciones de la ecuación diferencial, de manera que podemos decir que la solución general está dada por: $tg(y) = C(2 - e^x)^3$ con $C \in \mathbb{R}$.

3.2.1. Ejercicios

1. Hallen la solución general:
   i) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ ii) $(1 + y^2)dx + xydy = 0$
   iii) $(xy^2 + y^2)y' + (x^2 - yx^2) = 0$ iv) $ylnydx + xdy = 0$
   v) $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$ vi) $(1 + e^x)yy' = e^y$

2. Hallen $y = \varphi(x)$, que sea solución particular de la ecuación diferencial
   $y(4x + 6)dx - (x^2 + 3x + 2)dy = 0$ con $\varphi(0) = 4$,

3.3. Ecuación diferencial exacta

Ecuación diferencial exacta

La ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es una *ecuación diferencial exacta* en $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una función $f(x,y)$ tal que $\forall (x,y) \in D$,
$P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$
$Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
Siendo así, $f(x,y) = C$ es la solución general.

En efecto: al derivar respecto de x en $f(x,y) = C$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

y, siendo $P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, resulta

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Ejemplo: dada $2xdx + 2ydy = 0$ es fácil reconocer una función $f(x,y)$ tal que $2x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $2y = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Una función que cumple esas condiciones es por ejemplo $f(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces, la ecuación diferencial $2xdx + 2ydy = 0$ es exacta y $x^2 + y^2 = C$ define en forma implícita la *solución general* de esa ecuación.

No todas las ecuaciones de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ son exactas y no siempre es fácil reconocer a simple vista si una ecuación es exacta o no. Conviene tener en cuenta que, si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta en D, o sea, si existe $f(x,y)$ tal que $P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $\forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, suponiendo que las derivadas parciales de P y Q sean continuas, debe ser:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Si es además $D = (a,b) \times (c,d)$. vale también la afirmación recíproca de la anterior. Resumiendo:

Criterio de exactitud: Supongamos que $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas en el rectángulo $D = (a,b) \times (c,d)$. La ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta en D si y sólo si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en cada punto de D.

Ejemplos:

- Dada $(y - x^2)dx + (x - y^2)dy = 0$, observamos que

$$P(x,y) = y - x^2$$
$$Q(x,y) = x - y^2$$

P y Q son funciones polinomiales, tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2$ y se cumple, en cada punto de ese conjunto, que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

La ecuación $(y - x^2)dx + (x - y^2)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta en $D = \mathbb{R}^2$, o sea :
Existe una función $f(x,y)$ tal que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se cumplen las siguientes dos igualdades:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y - x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x - y^2$$

Veremos a continuación cómo hallamos esa función f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y - x^2 \to f(x,y) = \int (y - x^2)dx = yx - \frac{x^3}{3} + g(y)$$

($g(y)$, por el momento desconocida, es la constante de integración respecto de x)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x - y^2 \to x + g'(y) = x - y^2 \to g'(y) = -y^2 \to$$

$$\to g(y) = \int -y^2 dy = \frac{-y^3}{3} + C$$

De modo que

$$f(x,y) = yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$$

es una función tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y - x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x - y^2$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial: $(y-x^2)dx + (x-y^2)dy = 0$ es:

$$yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = C$$

(verificarlo).

- ¿Es exacta la ecuación diferencial $(2xy - e^x)dx + dy = 0$?
  Observamos que
  $$P(x,y) = 2xy - e^x$$
  $$Q(x,y) = 1$$
  $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones que tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2$.
  $$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$
  $$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$
  Concluimos entonces que $(2xy - e^x)dx + dy = 0$ no es exacta.

3.3.1. Ejercicios

1. Comprueben que las siguientes ecuaciones son exactas y obtengan su solución general.
   i) $6xydx + (3x^2+2y)dy = 0$ ii) $(y^3+6xy)dx + (3xy^2+3x^2-2y)dy = 0$
2. Hallen la solución particular de $ycos(xy)dx + [1 + xcos\,(xy)]\,dy = 0$ cuya gráfica pasa por $(0,1)$.

3.4. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se clasifican además en **lineales** o **no lineales.**

En general una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n puede expresarse en la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{3.1}$$

donde $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$ y $f(x)$, son funciones definidas en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Además, si *f(x)=0* la ecuación diferencial se denomina **homogénea** y si no, se la denomina **no homogénea.**

Las ecuaciones diferenciales lineales surgen en numerosos problemas corrientes. Por ejemplo, la ecuación de segundo orden lineal homogénea, $y'' + \frac{k}{m}y = 0$, modela el movimiento de una masa unida a un resorte.

Pero la importancia de las ecuaciones diferenciales lineales proviene además del hecho que resultan más fáciles de resolver y comprender que las ecuaciones diferenciales no lineales. A diferencia de estas últimas, en las lineales es válido, como veremos, el principio de superposición, el cual permite obtener soluciones de problemas complejos mediante la superposición de soluciones de problemas más sencillos.

Ecuación diferencial lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma:

$$y' + p(x)\ y = q(x)$$

con $p(x)$ y $q(x)$ funciones de una variable real definidas en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $q(x) = 0$, la ecuación diferencial resulta ser:

$$y' + p(x)\ y = 0$$

y se la denomina ecuación diferencial de primer orden lineal *homogénea.*

Ejemplos:

- $y' + 2xy = e^x$
- $y' = senx$

- $x^2y' + xy = e^x$ (aquí, suponiendo $x \neq 0$, se divide por x^2 para llevar la ecuación a la forma general: $y' + \dfrac{1}{x}\, y = \dfrac{e^x}{x^2}$

3.4.1. Propiedades fundamentales de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Las ecuaciones diferenciales lineales poseen propiedades especiales, que permiten establecer las propiedades fundamentales de sus soluciones aun sin conocerlas explícitamente.

Solución trivial, como puede verse fácilmente $y(x) = 0$ es solución de la ecuación homogénea.
Además, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea, la **combinación lineal**

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

es también solución de la homogénea, para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2. Es decir, si $y(x)$ es solución, $cy(x)$ también lo es, y si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones, $y_1(x) + y_2(x)$ también lo es.

La propiedad anterior se conoce como **propiedad de superposición**: Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, **cualquier combinación lineal de ellas es también una solución.**

3.4.2. Solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden

Dada la ecuación

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3.2}$$

es fácil observar que se puede resolver por separación de variables escribiendo que

$$y' = dy/dx$$

resulta que

$$dy/dx + p(x)y = 0$$

entonces $dy/y = -p(x)dx$.

Integrando ambos miembros, la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea es:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

como es fácil verificar, donde C es una constante y $\int p(x)dx$ una primitiva de $p(x)$ en el intervalo I donde es continua.

Además, la única solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' + p(x)y &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

es entonces

$$y(x) = y_0.e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \tag{3.4}$$

Actividad 1: Hallar la solución general de

$$y' + ay = 0$$

(es decir que $p(x)$ es constante a). Este tipo de ecuación diferencial, en la que no aparece x explícitamente, se denomina *autónoma*. Graficar algunas de las familias de soluciones según sea a positivo o negativo.

Actividad 2: Probar que la solución general de

$$y' + xy = 0$$

es $y(x) = ce^{-x^2/2}$, y que la única solución que satisface $y(0) = 1$ es $y(x) = e^{-x^2/2}$.

3.4.3. Solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

Consideremos ahora el caso general

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

Actividad: En el caso que $p(x)$ y $q(x)$ sean constantes a y b, la ecuación diferencial queda de la forma

$$y' + a\, y = b$$

Analizar si es posible resolverla mediante alguna de las técnicas ya estudiadas. ¿Qué obtuviste?

Veamos entonces el caso más general donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto I.

La solución general de esta ecuación está dada por la suma de la **solución general** $y_h(x)$ de la ecuación **homogénea** más una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación **no homogénea**:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde

$$y_h(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

es la solución general de la ecuación homogénea.

Demostración:

Dado que $y_h' + p(x)y_h = 0$ y $y_p' + p(x)y_p = q(x)$, vemos $y_h(x) + y_p(x)$ es también solución de la ecuación no homogénea. Entonces esto muestra que la diferencia $y(x) - y_p(x)$ **es una solución** $y_h(t)$ **de la ecuación homogénea** para $y(x)$ en general solución de la ecuación no homogénea. Por lo tanto $y(x) - y_p(x) = y_h(x)$ y entonces $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Importante: Para resolver la ecuación general de la no homogénea debemos pues resolver la ecuación homogénea y luego encontrar alguna solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea mediante algún método.

Método para hallar una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea La ecuación es

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Vimos previamente que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Para hallar una solución particular, utilizaremos un método denominado **variación de parámetros**.

Consiste en proponer una solución de la forma

$$y_p(x) = v(x)e^{-\int p(x)dx}$$

con $v(x)$ una función a determinar.

Notar que consiste en "variar el parámetro"C en la solución de la homogénea y que este resultado sea una solución particular de la no homogénea.

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea se obtiene

$$v' e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

Por lo tanto,

$$v' = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$$

entonces

$$v(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

Una solución particular es entonces

$$y_p(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

y la solución general es

$$\boxed{y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} (\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)}$$

Resumen:

1) Proponer que la solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

2) Hallar la solución general de la homogénea $y_h(x)$ (es de variables separables).

3) Hallar $y_p(x)$ haciendo variar la constante C en la solución homogénea proponiendo que sea una solución particular de la no homogénea.

4) Volver a 1) y armar la solución general.

Ejemplo

Resolvemos la ecuación:

$$y' - \frac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3$$

Reconocemos en la ecuación la forma $y' + p(x)\, y = q(x)$, con $p(x) = -\dfrac{2}{x+1}$ y $q(x) = (x+1)^3$.

1) Proponemos que $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

2) Hallamos la solución general de la ecuación homogénea y_h:

$$y' - \frac{2}{x+1}\,y = 0$$

Es esta una ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx$$

Integrando resulta:

$$ln\Big|y\Big| = 2ln\Big|x+1\Big| + K$$

Operando y aplicando exponencial a ambos miembros, se obtiene:

$$y_h(x) = C(x+1)^2$$

3) Buscamos por el método de variación de parámetros, una solución particular y_p de la ecuación no homogénea, proponiendo que:

$$y_p(x) = v(x).(x+1)^2$$

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea, resulta que:

$$v'(x) = (x+1)$$

Obtenemos:

$$v(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$$

(Notar que aquí, para $v(x)$ dado que estamos buscando una solución particular, podemos considerar para la constante de interacción cualquier valor deseado, por ejemplo en este caso, cero).

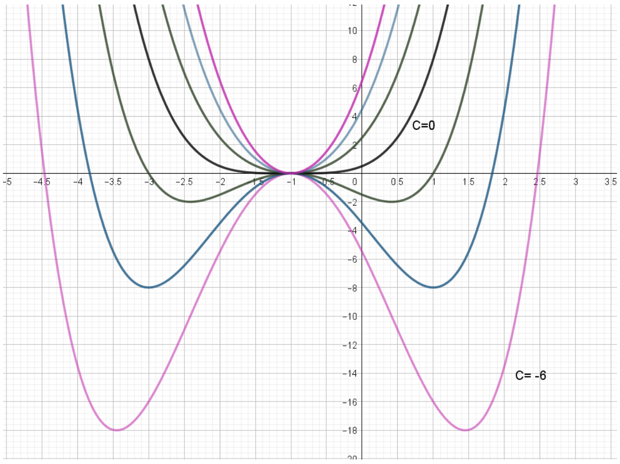
Reemplazamos ahora esa función v en lo anterior

$$y_p(x) = \frac{(x+1)^4}{2}$$

4) Resultando la **solución general** de la ecuación:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$$

Algunas de las gráficas de la familia de soluciones se observa en la siguiente figura.



Si además, nos interesara, por ejemplo, hallar la solución particular que satisface $y(0) = 3$, despejamos el valor de C haciendo:

$$3 = C(0+1)^2 + \frac{1}{2}(0+1)^4 \implies 3 = \frac{1}{2} + C \implies C = \frac{5}{2}$$

y la solución particular buscada es: $y(x) = \dfrac{5}{2}(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(x+1)^4$.

3.4.4. Otro método para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden

Otra forma de resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, es suponer que la solución general es el **producto de dos funciones**:

$$y(x) = u(x).v(x)$$

En este caso se debe cumplir que:

$$(u.v)' + p(x)\, u.v = q(x)$$

$$u'v + u.v' + p(x)\, u.v = q(x)$$

Agrupando:

$$(u' + p(x)\, u).v + u.v' = q(x)$$

y si suponemos además que $u(x)$ es **una solución de la ecuación homogénea,** es decir que el primer sumando es cero:

$$u' + p(x)\, u = 0$$

Resulta que v deber ser tal que

$$u.v' = q(x)$$

y despejando $v'(x) = q(x)/u(x)$, luego

$$v(x) = \int \frac{q(x)}{u(x)} dx + C$$

Resumen:

1) Proponer que la solución general es el producto de dos funciones: $y(x) = u(x).v(x)$.

2) Encontrar u suponiendo que es una solución de la ecuación homogénea.

3) Hallar v resolviendo: $v(x) = \int \frac{q(x)}{u(x)} dx + C$.

4) Volver al paso 1) y armar la solución general.

Ejemplo: Resolver usando este método:

$$y' - \frac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3$$

Veamos que se obtiene el mismo resultado que por el otro método.

1) Proponer que $y = u.v$

2) Hallar u. Para ello resolvemos:

$$u' - \frac{2}{x+1}\, u = 0$$

Es esa una ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{du}{u} = \frac{2}{x+1} dx$$

Integrando resulta: (consideramos la constante cero de integración, ya que estamos buscando sólo una solución.

$$ln\Big|u\Big| = 2ln\Big|x+1\Big|$$

Aplicando propiedades del logaritmo:

$$ln\Big|u\Big| = ln\Big|x+1\Big|^2$$

Aplicando exponencial a ambos miembros, resulta:

$$u = (x+1)^2$$

3) Buscar v que sea solución de

$$v'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3 \implies v'(x) = (x+1)$$

de donde

$$v(x) = \int (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

4) Resulta así que la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = u.v = (x+1)^2 . \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right]$$

Distribuyendo:

$$y(x) = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$$

Observación: Notar que es la misma solución encontrada por el otro método. Existe otro método para hallar la solución general de la ecuación no homogénea de primer orden, que aquí no desarrollaremos, que se conoce como "*factor integrante*".

Actividad: Hallar la solución general de $dy/dx + ay = b$ con a y b constantes. Luego hallar la solución para el caso: $dy/dx + y = 2$ con $y(0) = 1$.

Actividad: Hallar la familia de curvas tales que la pendiente en cada uno de sus puntos $A = (x, y)$, coincide con la resta entre, la abscisa del punto A y su ordenada.

- Luego de resolver puedes visualizar la familia de soluciones en **GeoGebra**.

3.4.5. Ejercicios

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   i) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ ii) $xy' = y + x^2 senx$ iii) $y' + 2y = x^2 + 2x$

2. Hallen la solución particular de $y' - ytgx = secx$ que satisface $y(0) = 0$.

3. Hallen la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y es tal que en cada punto (x, y) su pendiente es igual a $x + y$.

4. Un cuerpo de masa m se arroja desde cierta altura. Sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad (F_1), actúa la fuerza de resistencia del aire (F_2) y ésta última es proporcional a la velocidad $(v(t))$.
   $F_1 = m\ g$ y $F_2 = k\ v(t)$ (donde k es un factor de proporcionalidad) De acuerdo a la segunda ley de Newton, $F_1 + F_2 = m.a(t)$ donde $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$.
   Entonces: $m\ g + k\ v = m\dfrac{dv}{dt} = mv'$
   dividiendo por m : $g + \dfrac{k}{m}\ v = v'$
   o sea: $v' - \dfrac{k}{m}\ v = g$
   Observen que se trata de una ecuación diferencial lineal. Hallen la solución general. Determinen luego la constante suponiendo que $v(0) = v_0$.

3.5. Problema de valor inicial

Problema de valor inicial (PVI)

Se llama *problema de valor inicial* al problema de hallar, para una ecuación diferencial dada, la o las soluciones (si existen) que satisfacen lo que se denomina una *condición inicial* o sea, una condición de la forma $y(x_0) = y_0$.

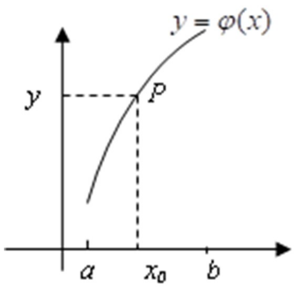
Considerando que resolver una ecuación diferencial es, por lo general, una tarea dificultosa (tengan presente que hemos visto cómo resolver sólo algunas pocas ecuaciones sencillas, con un formato determinado) comprenderán que resulta de mucho interés, dado un problema de valor inicial, poder decidir, antes de abordar la búsqueda de la solución, si dicha solución existe y si es única. El teorema que enunciamos a continuación se refiere a ello:

3.5.1. Teorema de existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial

Teorema de existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial

Si $f(x, y)$ es continua en algún rectángulo $D \subset \mathbb{R}^2$ que tiene en su interior al punto (x_0, y_0) entonces el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene al menos una solución. Si además $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en ese rectángulo, la solución es única en algún intervalo (a, b) al que pertenece x_0.

El teorema anterior garantiza, bajo las hipótesis mencionadas, que, en algún intervalo (a, b) al que pertenece x_0, existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial $y = \varphi(x)$ que satisface la condición inicial $y_0 = \varphi(x_0)$, o, dicho de otra manera, que, alrededor de x_0 está definida una única función cuya gráfica pasa por (x_0, y_0) y tiene , en cada punto (x, y) pendiente igual a $f(x, y)$.



Importante: El teorema anterior da condiciones <u>suficientes</u> (pero no necesarias) para la existencia y para la unicidad de la solución de un PVI de la forma $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Ejemplos:

- El teorema anterior puede aplicarse al PVI: $\begin{cases} y' = xy + e^{-x}y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

cualquiera sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y garantiza la existencia y unicidad de la solución en algún intervalo que contiene a x_0, dado que $f(x,y) = xy + e^{-x}y^2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + e^{-x}\, 2y$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

- ¿Cuál es el conjunto de puntos (x_0, y_0) para los que se podría garantizar aplicando el teorema anterior la existencia y unicidad de solución del PVI: $\begin{cases} y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$? $f(x,y) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ son funciones continuas en $\{(x,y)\,/y > 0\}$ y en $\{(x,y)\,/y < 0\}$ de manera que para todo (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ el teorema se aplica y garantiza existencia y unicidad de solución.
  Para puntos $(x_0, 0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, el teorema puede aplicarse para garantizar la existencia de solución (vean que $f(x,y) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$), pero no asegura la unicidad, ya que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ no es continua en los puntos $(x_0, 0)$.

- El teorema anterior puede aplicarse al PVI: $\begin{cases} y^2 + x^2y' = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, para cualquier punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \neq 0$ y garantiza la existencia y unicidad de la solución en algún intervalo que contiene a x_0, dado que $f(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{2y}{x^2}$ son funciones continuas en $\{(x,y)\,/x < 0\}$ y en $\{(x,y)\,/x > 0\}$.
  El teorema no se puede aplicar en $\begin{cases} y^2 + x^2y' = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, cualquiera sea y_0 ya que $f(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2}$ no es continua en los puntos $(0, y_0)$

3.5.2. Ejercicios

1. ¿Se aplica el teorema de existencia y unicidad de solución en los siguientes casos? ¿Existe la solución? ¿Es única?
   i) $\begin{cases} y^2 + x^2y' = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y^2 + x^2y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. En los siguientes incisos señalar para qué puntos (x_0, y_0) es posible aplicar el teorema para garantizar la existencia y la unicidad de la

solución.

i) $\begin{cases} y' = y^2 + x^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 - y} - x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{x-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

3. En los siguientes incisos, ver primero si pueden garantizar la existencia y unicidad de solución y, a continuación, resuelvan.

   i) $\begin{cases} (1 + e^x)\ y\ y' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y' senx = ylny \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e \end{cases}$ iii) $\begin{cases} y' = y\ tgx + x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

   iv) Hallar una curva que pase por $(0, -2)$ y sea tal que la tangente en cada punto (x,y) sea igual a la ordenada del punto aumentada en 3 unidades.

3.6. Modelado de problemas

Veamos a continuacion algunos fenómenos que son modelados con ecuaciones diferenciales ordinarias.

- **Modelo de crecimiento de una célula**
  Supongamos que una célula que tiene una masa inicial m_0 está creciendo en un medio ideal. Siendo así, la masa de esa célula puede considerarse como una *función del tiempo* ($m = m(t)$) que *aumenta a una velocidad proporcional al estado en cada instante* (por lo menos durante algún intervalo de tiempo):

  $$m'(t) = K\ m(t)$$

  Lo antes dicho se traduce en un PVI:

  $$\begin{cases} m'(t) = K\ m(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

  Resuelvan para tener la expresión de $m(t)$. ¿Qué tipo de solución se encuentra en estos casos? Graficar. Suponiendo que la masa inicial se duplica cuando $t = 35$, determinen el valor de K.

- **Modelo de crecimiento restringido de una población**
  Cierto es que las poblaciones y los organismos no crecen indefinidamente. Hay limitaciones para el crecimiento. Supongamos que existe un límite superior fijo (B) para el tamaño de una población, de modo que la velocidad de crecimiento del número de individuos existentes

tiende a cero cuando el número de individuos tiende a ese límite superior. Tiene sentido entonces suponer que, el número de individuos es una función del tiempo $N(t)$, que crece a una velocidad proporcional a la diferencia entre B y el estado de la población en cada t. Siendo N_0 el número inicial de individuos presentes, lo dicho anteriormente se traduce en:

$$\begin{cases} N'(t) = K \ [B - N(t)] \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Resolver para obtener la expresión de $N(t)$. Graficar lo obtenido.

- **Modelo de enfriamiento de Newton**
  Consideremos una sustancia cuya temperatura es más alta que la del ambiente que la rodea. La experiencia dice que la temperatura descenderá hasta igualar la del medio externo. Pensemos por ejemplo en un recipiente con un líquido a temperatura ambiente que se coloca en la heladera. La ley de enfriamiento de Newton establece que, *bajo determinadas condiciones, la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y a la del medio (más frío) que la rodea.* Siendo t el tiempo; T_0 la temperatura de la sustancia en el instante inicial $(t = 0)$; $T(t)$ la temperatura de la *sustancia* en el tiempo t, T_a la temperatura del ambiente, lo dicho antes se modela de la siguiente manera mediante un PVI:

$$\begin{cases} T'(t) = K \, [T(t) - T_a] \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

  Resuelve para obtener la expresión de $T(t)$. Graficar. Supongan que la temperatura ambiente es 20° y que en 20 minutos la temperatura de un cuerpo baja de 100° a 60°. Hallen la expresión de $T(t)$ en este caso y respondan: ¿en cuánto tiempo la temperatura llegará a los 30°?

- **Modelo de desintegración radioactiva**
  El radiocarbono es un isótopo radioactivo del carbono que tiene una semivida de unos 5600 años (la semivida es el tiempo requerido para que una cantidad de ese elemento se reduzca a la mitad).
  Una cantidad inicial C_0 de radio carbono se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad existente en cada instante. Siendo $C(t)$ la cantidad de radiocarbono existente en el tiempo t, planteen el PVI correspondiente y resuelvan para obtener la expresión de $C(t)$.
  Suponiendo que se ha encontrado un hueso fosilizado que contiene la milésima parte de la cantidad de radio carbono inicial, determinen la edad del fósil.

- **Modelo de decaimiento exponencial**
  Las ecuaciones diferenciales de decaimiento exponencial son utilizadas para modelar fenómenos en los que una cantidad disminuye con el tiempo de acuerdo con una tasa proporcional a su valor actual.

  Este tipo de modelo es comúnmente aplicado en diversos campos, como la física, la biología, la economía y la química, entre otros. Ejemplos son algunos de los mencionados anteriormente. La forma general de una ecuación diferencial de decaimiento exponencial es:

  $$\frac{dy}{dt} = -ky$$

  Donde y es la cantidad que está disminuyendo con el tiempo, t es el tiempo, dy/dt es la tasa de cambio de y con respecto al tiempo y k es la constante de proporcionalidad que determina la rapidez de decaimiento. Si suponemos que y_0 es el valor inicial de y en $t = 0$, la solución de esta ecuación diferencial (variables separables) es de la forma:

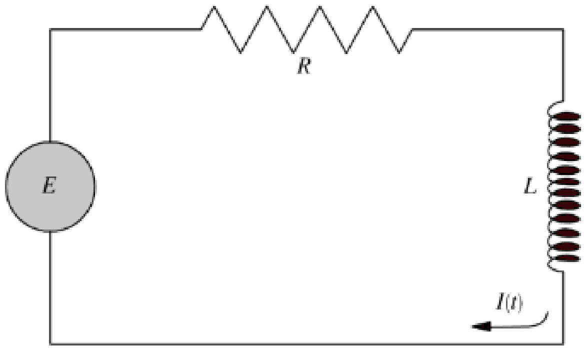
  $$y(t) = y_0\, e^{-kt}$$

  Este modelo se utiliza para describir diversas situaciones en las que una cantidad disminuye de forma continua, como la desintegración radiactiva, la degradación de fármacos en el organismo, el enfriamiento de un objeto caliente, el decaimiento de una población de bacterias o el crecimiento y decaimiento de una inversión financiera, entre otros ejemplos.

  En resumen, las ecuaciones diferenciales de decaimiento exponencial son herramientas matemáticas utilizadas para modelar y predecir la disminución de una cantidad en función del tiempo, asumiendo que la tasa de cambio es proporcional a su valor actual. Estas ecuaciones tienen aplicaciones en diversos campos y su solución general muestra cómo la cantidad disminuye exponencialmente con el tiempo.

- **Modelo de un circuito en serie**
  Un circuito en serie es aquel en el que los componentes eléctricos están conectados uno tras otro, de modo que la corriente fluye a través de cada componente en el mismo camino. Para describir matemáticamente el comportamiento de un circuito en serie, se puede utilizar una ecuación diferencial. La ecuación diferencial que modela un circuito en serie depende de los componentes específicos presentes en el circuito. Sin embargo, en general, se puede utilizar la *ley de Kirchhoff* para escribirla. Esta establece que *la suma algebraica de todas las caídas de tensión es*

igual a la tensión total suministrada, es decir, la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico en un circuito cerrado es igual a cero. Supongamos que tenemos un circuito en serie con una fuente de *energía* $E(t)$ y una *resistencia* R conectada en serie (constante), y t el *tiempo.*



La ecuación diferencial que describe la corriente $I(t)$ en el circuito es:

$$L\frac{dI}{dt} + R.I(t) = E(t)$$

Donde L es una constante que mide la inductancia del circuito, dI/dt es la derivada de la corriente con respecto al tiempo y $E(t)$ es la función que describe la fuente de energía electromotriz en función del tiempo. Esta ecuación diferencial describe cómo cambia la corriente en el circuito en serie a medida que varía la fuente de voltaje y la resistencia. Observar que la ecuación es del tipo lineal de primer orden. Resolver esta ecuación permite obtener $E(t$ en función del tiempo y comprender cómo se comporta el circuito. En resumen, un circuito en serie se puede modelar utilizando una ecuación diferencial que relaciona la fuente de energía electromotriz, y los componentes presentes en el circuito. La ecuación diferencial permite analizar el comportamiento dinámico de tal fuente en el circuito a medida que cambian las variables involucradas.

3.6.1. Ejercicios

Expresar mediante ecuaciones diferenciales, las siguientes situaciones. Resolver.

1. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de manera que su velocidad en el instante t es $2sent$.

2. Cien gramos de azúcar de caña que están en agua, se convierten en dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. Hállese la ecuación diferencial que exprese la velocidad de conversión después de t minutos (Indicación: puede suponer q(t) el número de gramos convertidos en t minutos).

3. La población P de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a. la población y a la diferencia entre 200.000 y la población.

4. El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad Q del radio presente.

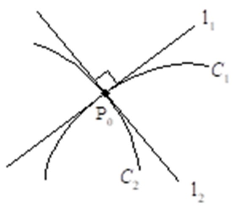
5. Para cierta sustancia, la velocidad de cambio de la presión de vapor P respecto de la temperatura T, es proporcional a la presión de vapor e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.

6. Aplique la ley de enfriamiento de Newton al siguiente caso: la temperatura del aire es de 20ºC y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100ºC hasta 60ºC, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30ºC?

7. Dar la solución general de la ecuación diferencial para un circuito en serie, suponiendo que $E(t)$ es constante E (una batería por ejemplo) y que $I(0) = 0$ (corriente inicial es cero). Graficar la solución obtenida para valores de t positivos e interpretar que sucede con el comportamiento del circuito en el tiempo.

3.7. Familias de curvas ortogonales

Dos curvas C_1 y C_2 se dicen ortogonales en un punto común $P_0 = (x_0, y_0)$ cuando las respectivas rectas tangentes son perpendiculares entre sí.



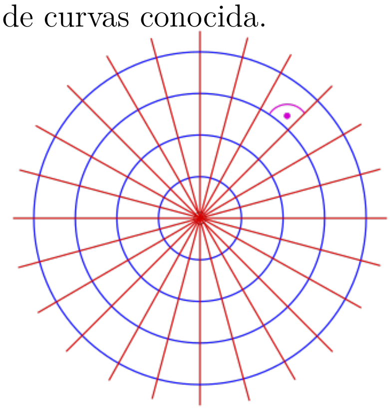
Si es $C_1 : y = \varphi_1(x)$ y $C_2 : y = \varphi_2(x)$, siendo φ_1 y φ_2 derivables en x_0, con $\varphi_1'(x_0) \neq 0$ y $\varphi_2'(x_0) \neq 0$, entonces C_1 y C_2 son ortogonales en P_0 si y sólo si

$\varphi_1'(x_0)\varphi_2'(x_0) = -1$, o sea:

$$\varphi_2'(x_0) = -\frac{1}{\varphi_1'(x_0)}$$

Familia de curvas ortogonales

Dos familias de curvas $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son *mutuamente ortogonales* si cada curva de una de las familias es ortogonal con cada curva de la otra familia en todo punto común. Este estilo de situaciones es un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica, que involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales sea ortogonal a las de una familia de curvas conocida.



Si $y' = f_1(x, y)$ es la ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_1$ e $y' = f_2(x, y)$ es la ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_2$ entonces, en los puntos en los que $f_1(x, y) \neq 0$ y $f_2(x, y) \neq 0$, debe ser

$$f_1(x, y) = -\frac{1}{f_2(x, y)}$$

Ejemplos:

- Sea $\mathcal{F}_1 : y = Cx^2$, con $C \neq 0$ (familia de parábolas)
  Para hallar la familia de curvas $\mathcal{F}_2$ ortogonal a $\mathcal{F}_1$:
  1°) Hallamos la ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_1$:

$$y = Cx^2$$

$$y' = 2Cx$$

de allí, $\quad y'x = 2y \rightarrow y' = \dfrac{2y}{x} \qquad (x \neq 0)$

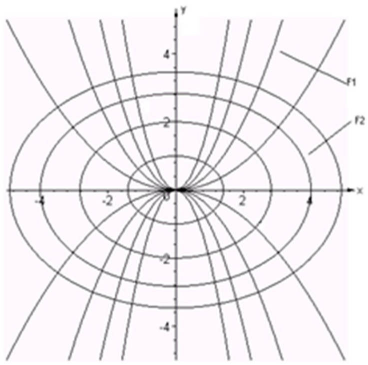
2°) Resolvemos la ecuación diferencial $y' = -\dfrac{x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$xdx + 2ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C$$

$\mathcal{F}_2 : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = C$ con $C > 0$ es una familia de elipses. $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son mutuamente ortogonales.



- Las familias $\mathcal{F}_1 : x^2 - y^2 = C$ y $\mathcal{F}_2 : xy = C$ son mutuamente ortogonales. Podemos mostrarlo obteniendo las ecuaciones diferenciales asociadas a cada una de ellas:
  La ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_1$ es:

$$2x - 2yy' = 0$$

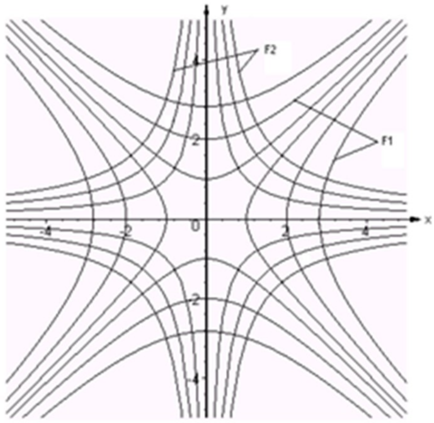
o sea
$$y' = \frac{x}{y} = f_1(x, y)$$

La ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_2$ es:

$$y + xy' = 0$$

o sea
$$y' = -\frac{y}{x} = f_2(x, y)$$

Vemos que se verifica , si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, $f_1(x, y) = -\dfrac{1}{f_2(x, y)}$



3.7.1. Ejercicios

1. Muestren que las familias $\mathcal{F}_1 : x^2+y^2-2ax=0$ y $\mathcal{F}_2 : x^2+y^2-2ay=0$ son mutuamente ortogonales.
2. En los siguientes incisos hallen la familia ortogonal a la familia de curvas dada: i) $y^2=Cx^3$ ii) $y=Cx$ iii) $y=Ce^{-x}$ iv) $x^2+3y^2=C \quad (C>0)$.

Capítulo 4

Integral doble

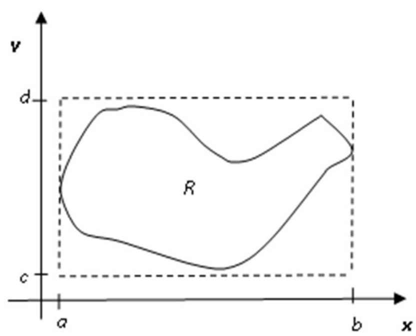
Actividad Si $f(x, y)$ es una función continua, definida sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ y es tal que $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R$, su gráfica es una superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ y queda definido, entre el plano xy y esa superficie un *sólido* V que se describe analíticamente de la siguiente manera:

$$V = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\Big\}$$

¿Cómo procederían para calcular el volumen de ese sólido?

4.1. Definición de integral doble

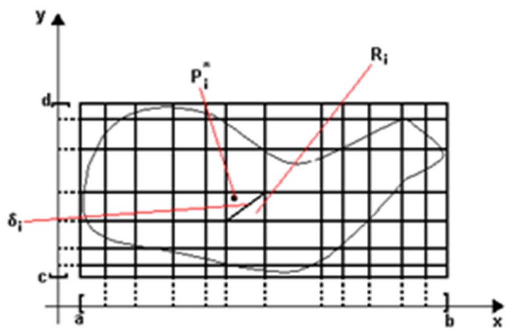
Sea $f(x, y)$ una función definida y acotada en una región R
$R \subset [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ como la que muestra la figura siguiente



Si se consideran $n+1$ puntos de división en $[a,b]$ y $m+1$ puntos en $[c,d]$ y se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados pasando por esos puntos, el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ queda dividido en $n\times m$ subrectángulos R_i. Supongamos que, entre ellos, $R_1, R_2, ..., R_k$, son los que están incluidos en R.

El conjunto $\mathcal{P}=\{R_1,R_2,...,R_k\}$ es una *partición* de R y, siendo δ_i la longitud de la diagonal de R_i, la *norma* de esa partición es $\left|\mathcal{P}\right| = \text{máx}\ \{\delta_i, i=1..k\}$.

Sea $J_k = \sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\Delta R_i$, donde P_i^* es un punto cualquiera de R_i y ΔR_i es el área de R_i.



Si $\lim\limits_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\Delta R_i$ existe, y arroja siempre el mismo resultado independientemente de las particiones y de los P_i^* elegidos, decimos que f es integrable en R y es: $\iint_R f(x,y)dA = \lim\limits_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\Delta R_i$

Importante:

- Si $f(x,y)$ es continua en la región R entonces es integrable sobre R.
- También son integrables sobre R las funciones que son acotadas y continuas en R salvo en un número finito de subconjuntos de área nula (como curvas y puntos).
- Si $f(x,y)$ es continua en R y $f(x,y)\geq 0$, siendo

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x,y)\in R\wedge 0\leq z\leq f(x,y)\right\}$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\Delta R_i = \text{volumen del sólido } V$$

4.1.1. Ejercicios

- Interpreten geométricamente $\iint_R f(x,y)dA$ suponiendo:
  i) $f(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in R$ ii) $f(x,y)$ toma valores positivos y valores negativos en $\mathbb{R}$ iii) $f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in R$.

- Siendo $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f(x,y) = K \quad \forall (x,y) \in R$, muestren que $\iint_R f(x,y)dA =$ área $(R).K$

- Dividiendo a $R = [0,2] \times [0,2]$ en cuatro cuadrados de igual área y eligiendo en cada uno de ellos el vértice superior derecho, aproximen el volumen del sólido que está por arriba del cuadrado R y por debajo del paraboloide $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

- Dividiendo a $R = [0,2] \times [1,2]$ en cuatro rectángulos de igual área y eligiendo el punto medio en cada uno de ellos obtengan una aproximación del valor de $\iint_R (x - 3y^2)dA$ ¿Representa esa integral el volumen de un sólido?

Propiedades de la integral doble

1. **Aditividad en la región de integración:** Si $f(x,y)$ es integrable sobre
   $R = R_1 \cup R_2$ siendo $R_1 \cap R_2$ un conjunto de área nula entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

2. **Linealidad:** Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables sobre R y α y β son números reales entonces

$$\iint_R [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dA = \alpha \iint_R f(x,y)dA \ + \ \beta \iint_R g(x,y)dA$$

3. **Monotonía:** Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables sobre R y $f(x,y) \leq g(x,y) \; \forall (x,y) \in R$ entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

4. **Acotamiento:** Si $\forall (x,y) \in R$ es $\left| f(x,y) \right| \leq M$ entonces

$$\left| \iint_R f(x,y)dA \right| \leq M.área(R)$$

Teorema del valor medio

Si $f(x,y)$ es continua en $R \subset \mathbb{R}^2$ entonces existe $P^* \in R$ tal que

$$\iint_R f(x,y)dA = f(P^*)\ área(R).$$

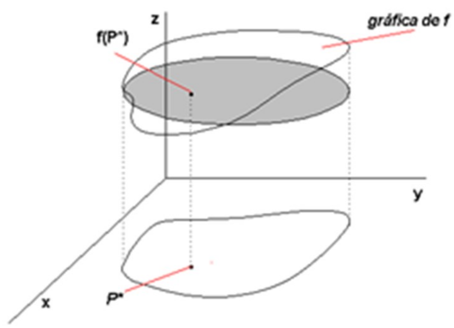
Valor promedio

Siendo $f(x,y)$ integrable sobre R, se llama *valor promedio de f en R* a f_R :

$$f_P = \frac{\int\int_R f(x,y)dA}{área(R)}$$

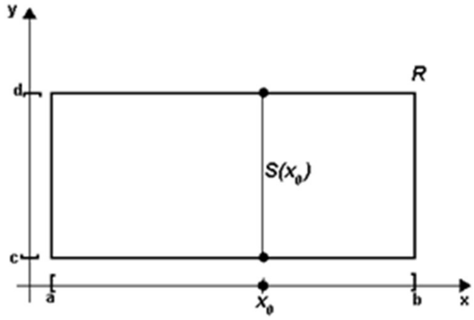
Así que el teorema anterior puede ser enunciado de la siguiente manera: Si $f(x,y)$ es continua en $R \subset \mathbb{R}^2$ entonces el valor promedio de f_P en R coincide con el valor de f en algún $P^* \in R$.

En caso de que sea $f(x,y) \geq 0$ en todo R, el teorema puede interpretarse geométricamente de la siguiente manera: el volumen del sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ coincide con el de un cilindro sólido con base en R y altura $f(P^*)$.



Cálculo de la integral doble

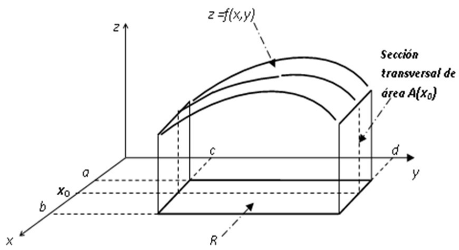
Supongamos que $f(x, y)$ es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$.
Entonces, para cada $x_0 \in [a, b]$, f es continua en el segmento
$S(x_0) = \{(x_0, y)/c \leq y \leq d\}$.



Existe por lo tanto

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy$$

¿Cómo se puede interpretar esa integral? Suponiendo $f(x, y) \geq 0$ en R , esa integral puede interpretarse como el área de la sección plana obtenida al intersecar el sólido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ con el plano $x = x_0$.



Lo que interpretamos para x_0 ocurre para todo x en $[a, b]$, quedando definida la función

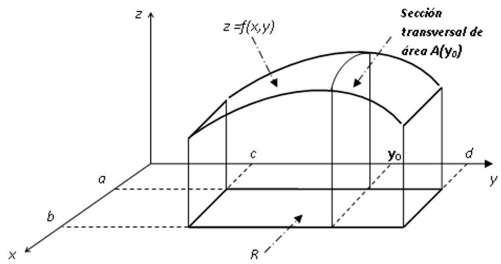
$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Al variar x las secciones producidas barren todo el sólido, lo que nos lleva a concluir que $\int_a^b A(x)dx$ representa el volumen del sólido, o sea:

$$vol(V) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx$$

Análogamente, $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ es el área de una sección del sólido perpendicular al eje y y por lo tanto

$$vol(V) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$



La interpretación geométrica anterior nos permite comprender el siguiente resultado que se conoce como **Teorema de Fubini**:

Teorema de Fubini

Para toda función $f(x,y)$ continua en un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$,

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

Ejemplo: Calcular $\int\int_R (1-6x^2y)\ dA$ siendo $R = [0,2] \times [-1,1]$,

$$\iint_R (1-6x^2y)\ dA = \int_0^2 \int_{-1}^1 (1-6x^2y)dydx = \int_0^2 [y-3x^2y^2]\Big|_{-1}^1 dx =$$

$$\int_0^2 [1-3x^2-(-1-3x^2)]dx = \int_0^2 2dx = 4$$

o

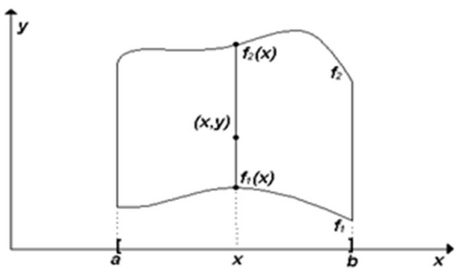
$$\iint_R (1-6x^2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1-6x^2y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(x-2x^3y\right)\Big|_0^2 dy =$$

$$\int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy = \left(2y-8y^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 4$$

Supongamos que $f(x,y)$ es continua en una *región tipo I*
Esto es, en una región que se describe en la forma

$$R = \{(x,y)\,/a \le x \le b \wedge f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

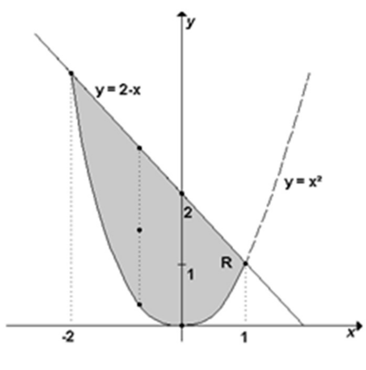
.



El teorema de Fubini se extiende a esta situación resultando:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplo: Integrar $f(x,y) = 2xy$ en la región R limitada por las curvas $y = x^2$ y $x + y = 2$.



Podemos apreciar en el gráfico que la región R es una región tipo I : toda recta vertical que pase por un punto interior corta a la frontera en dos puntos exactamente : uno en la curva $y = x^2$ y el otro en la recta $y = 2x$.
Para describir analíticamente la región R buscamos primero las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases} \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x = -2 \;\; o \;\; x = 1$$

de manera que $R = \{(x, y) \,/ -2 \le x \le 1 \wedge x^2 \le y \le 2 - x\}$ y entonces:

$$\iint_R 2xy \, dA = \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} 2xy \, dy \, dx = \int_{-2}^{1} xy^2 \Big|_{y=x^2}^{y=2-x} dx =$$

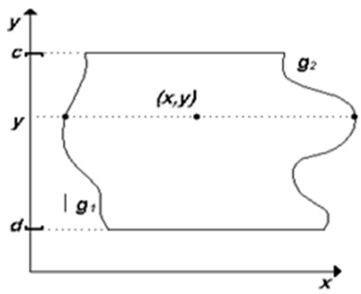
$$= \int_{-2}^{1} [x(2-x)^2 - x^5] dx = \int_{-2}^{1} (4x - 4x^2 + x^3 - x^5) dx = \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) - \left(8 + \frac{32}{3} + 4 - \frac{32}{3}\right) = -\frac{45}{4}$$

Supongamos que $f(x, y)$ es continua en una *región tipo II*
Esto es, en una región que se describe en la forma

$$R = \{(x, y) \,/ c \le y \le d \wedge g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

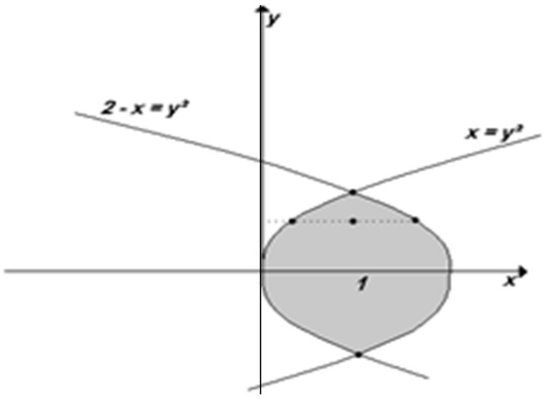
.



El teorema de Fubini se extiende a esta situación resultando:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ejemplo: Integrar $f(x,y) = 2xy$ en la región R limitada por las curvas $x = y^2$ y $2 - x = y^2$.



Podemos apreciar en el gráfico que la región R es una región tipo II : toda recta horizontal que pase por un punto interior corta a la frontera en dos puntos exactamente: uno sobre la curva $x = y^2$ y otro sobre la curva
$x = 2 - y^2$.
Para describir analíticamente la región R buscamos las ordenadas de los puntos de intersección de las curvas:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ 2 - x = y^2 \end{cases} \implies y^2 = 2 - y^2 \implies y = -1 \;\; o \;\; y = 1$$

de manera que $R = \{(x,y) \,/ -1 \le y \le 1 \wedge y^2 \le x \le 2 - y^2\}$

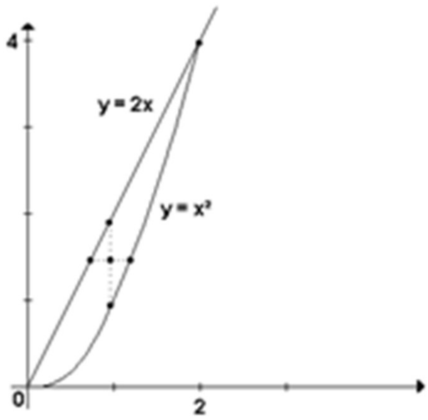
y entonces:

$$\iint_R 2xy\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} 2xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x^2 y \Big|_{x=y^2}^{x=2-y^2} dy = ...$$

(completen)

Algunas regiones son tanto de tipo I como de tipo II

Ejemplo: Sea R la región limitada por $y = x^2$ y $y = 2x$



Vean que R puede describirse en la forma

$$R = \left\{(x, y)\,/0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\right\} \qquad (Tipo\ I)$$

y también en la forma

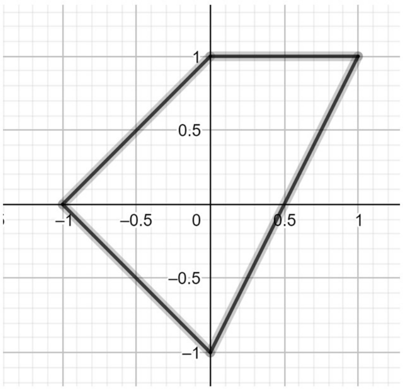
$$R = \left\{(x, y)\,/0 \leq y \leq 4 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\right\} \qquad (Tipo\ II)$$

De manera que la integral de una función $f(x, y)$ sobre esta región R puede calcularse integrando primero respecto de y después respecto de x o viceversa:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

Hay regiones que no son de tipo I ni de tipo II ¿qué podemos hacer para poder integrar en ese caso? Lo que se hace es tratar de subdividir la región en un número finito de subregiones que sean de tipo I o II y aplicar la propiedad de aditividad en la región de integración.

Ejemplo: Siendo R la región limitada por $y = x + 1$; $y = -x - 1$; $y = 1$ y $y = 2x - 1$, plantear el cálculo de $\iint_R f(x, y) dA$ integrando i) primero respecto de y y luego respecto de x ii) primero respecto de x y luego respecto de y.



R no es de tipo I ni de tipo II.
Puede describirse como unión de dos regiones tipo I: $R = R_1 \cup R_2$ siendo:

$$R_1 = \{(x, y) \, / -1 \leq x \leq 0 \wedge -x-1 \leq y \leq x+1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \, /0 \leq x \leq 1 \wedge 2x-1 \leq y \leq 1\}$$

De acuerdo a esa descripción:

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} f(x, y)dydx + \int_{0}^{1} \int_{2x-1}^{1} f(x, y)dydx$$

En este caso R también puede describirse como unión de dos regiones tipo II: $R = R_1 \cup R_2$ siendo:

$$R_1 = \left\{(x, y) \, / -1 \leq y \leq 0 \wedge -y-1 \leq x \leq \frac{y+1}{2}\right\}$$

$$R_2 = \left\{(x, y) \, /0 \leq y \leq 1 \wedge y-1 \leq x \leq \frac{y+1}{2}\right\}$$

De acuerdo a esa descripción:

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_{-1}^{0} \int_{-y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y)dxdy + \int_{0}^{1} \int_{y-1}^{\frac{y+1}{2}} f(x, y)dxdy$$

4.1.2. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, grafiquen la región de integración y calculen luego la integral:

i) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)dydx$ ii) $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 x\sqrt{y}dxdy$ iii) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-1}^1 (x+y+1)dxdy$

iv) $\displaystyle\int_1^8\int_0^{lny} e^{x+y}dxdy$ v) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{senx} y\,dydx$ vi) $\displaystyle\int_1^2\int_y^{y^2} dxdy$

2. Dibujen un sólido cuyo volumen se calcula con las siguientes integrales:

   i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (4-x-2y)dxdy$ ii) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (2-x^2-y^2)dxdy$

3. En los siguientes incisos, planteen el cálculo de la integral invirtiendo el orden de integración:
   i) $\displaystyle\int_0^1\int_2^{4-2x} f(x,y)dydx$ ii) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$ iii) $\displaystyle\int_0^2\int_{y-2}^0 f(x,y)dxdy$

4. Calculen las siguientes integrales (de ser necesario, inviertan el orden de integración para realizar el cálculo)

   i) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 sen\left(y^2\right)dydx$ ii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{seny}{y}dydx$ iii) $\displaystyle\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}dydx$

5. Integrar:

   a) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ en la región R limitada por $y=x$; $y=2x$; $x=1$ y $x=2$.

   b) $f(x,y)=x^2+y^2$ en el triángulo de vértices $(0,0)$; $(1,0)$ y $(0,1)$.

   c) $f(u,v)=v-\sqrt{u}$ en la región R limitada por $u+v=1$ y los ejes coordenados en el primer cuadrante.

   d) $f(s,t)=e^s lnt$ en la región R limitada por $s=lnt$; $t=2$ y $s=0$ en el primer cuadrante.

   e) $f(x,y)=y-2x^2$ en la región $R=\left\{(x,y)/\left|x\right|+\left|y\right|\leq 1\right\}$.

   f) $f(x,y)=xy$ en la región R limitada por $y=x$; $y=2x$ y $x+y=2$.

- Para la visualización y cálculo de integrales múltiples puedes ayudarte de las aplicaciones creadas en **GeoGebra**.

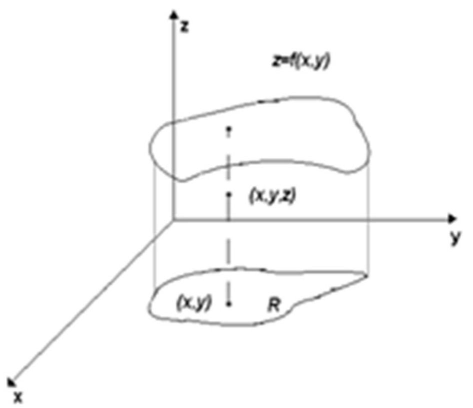
4.2. Aplicaciones de la integral doble

- **Área de una región plana**

$$\iint_R dA = área(R)$$

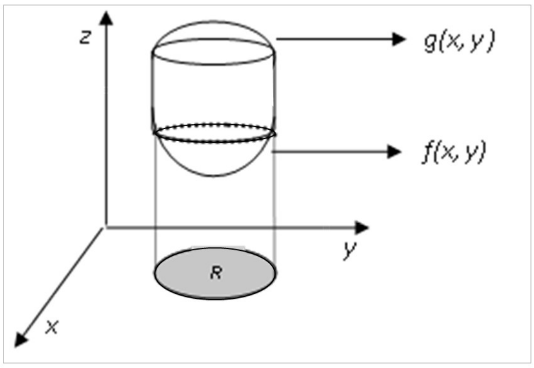
- **Volumen de un sólido**
  Hemos visto ya que, para f continua y no negativa en todos los puntos de una región R, si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$,

$$\iint_R f(x, y)dA = Volumen(V)$$



Para un sólido V que no está apoyado en el plano xy sino que se encuentra limitado por dos superficies, gráficas de funciones continuas f y g definidas en la misma región R, con $f(x, y) \leq g(x, y)$, es decir, para
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x, y) \in R \wedge f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$, es:

$$Volumen(V) = \iint_R [g(x, y) - f(x, y)]dA$$



- **Masa y centro de masa de una placa delgada**

  La *masa* M de una placa bidimensional R que tiene una *densidad superficial de masa* variable descrita por una función $\rho(x, y)$ está dada por:

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA$$

  y las coordenadas del centro de masa pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\ \rho(x, y) dA}{M} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\ \rho(x, y) dA}{M}$$

- **Centroide de una placa delgada o centro geométrico** Si la densidad de una placa delgada es homogénea en todos los puntos (x, y) de la placa e igual a $\rho(x, y) = K$, el centro de masa, en este caso se llama *centroide* y coincide con el centro geométrico.

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\ dA}{Area(R)} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\ dA}{Area(R)}$$

4.2.1. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, calculen empleando integrales dobles el área de la región limitada por las curvas dadas.
   i) $y = x^2$; $y = 8 - x^2$ ii) $y = x^2$; $x = y^2$ iii) $y = x^2$; $y = x + 2$
   iv) $x = y^2$; $x = 8 - y^2$ v) $y = -x^2 + 3$; $y = -1$
   vi) $y = x$; $y = x + 2$; $x = 3$; $x = 0$.

2. Calculen el valor promedio de:
   i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en la región limitada por $y = x^2 - 4$; $y = 3x$.
   ii) $T(x,y) = 50 + 2x + 2y$ en la región limitada por $y = x^2$; $y = 8 - x^2$

3. Calculen el volumen del sólido $V = \left\{(x,y,z)/(x,y) \in R \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}$ siendo R el triángulo limitado por las rectas $y = x$; $y = 0$ y $x + y = 2$.

4. Calculen el volumen del sólido limitado por:

   a) $y = x^2$; $y = 2 - x^2$; $z = y$ con con $z \geq 0$.

   b) $x^2 + y^2 = 4$; $z + y = 3$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ en el primer octante.

   c) $z^2 + y^2 = 4$; $x = 2y$; $x = 0$; $z = 0$ en el primer octante.

   d) $x + 2y + z = 2$; $x = 2y$; $x = 0$; $z = 0$.

   e) $y = x^2$; $z + y = 4$ con $z \geq 0$.

   f) $z = x^2 + y^2 + 4$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y = 1$.

   g) $x + y + z = 3$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$ en el primer octante.

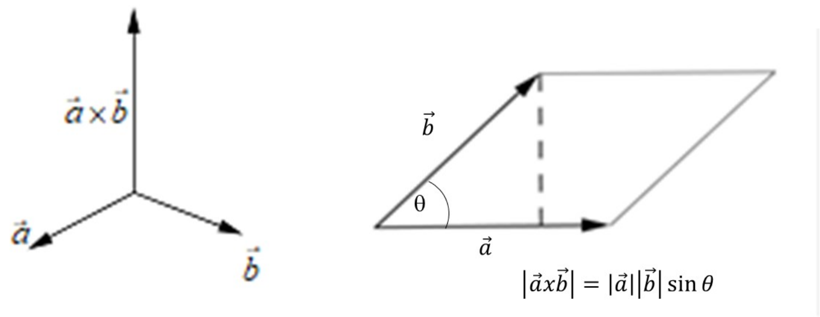
   h) $x + y + z = 3$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = 1$ en el primer octante.

5. Hallen el centro de masa de una lámina delgada cuya forma coincide con la región R limitada por $x = y^2$ y $x = 1$ siendo $\rho(x,y) = y^2 + x + 1$ la función densidad de masa.

4.3. Cambio de variables en la integral doble

Antes de entrar en el tema del cambio de variables nos referiremos al *producto vectorial* o *producto cruz* de vectores:
El producto cruz de $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ por $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ se denota $\vec{a} \times \vec{b}$.
$\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$ y cuyo módulo es el área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

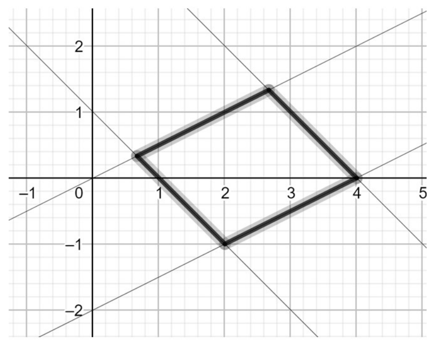


Hemos visto que en la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, el cambio de variable $x = g(u)$ nos permite establecer que, siendo $a = g(c)$ y $b = g(d)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Noten que el cambio de variable introduce el factor "$g'(u)$" en el integrando y modifica los límites de integración. Lo propio ocurre, como veremos a continuación, cuando se realiza un cambio de variables en la integral doble.

Actividad: Dada $\iint_R \left(\dfrac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA$, donde R es la región limitada por las rectas $x - 2y = 0$; $x - 2y = 4$; $x + y = 1$; $x + y = 4$, evalúen las dificultades que presenta su cálculo.



Vean que en $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA$, haciendo $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-2y \end{cases}$, la expresión del integrando se simplifica: $\left(\dfrac{x-2y}{x+y}\right)^{20} \quad \to \quad \left(\dfrac{v}{u}\right)^{20}$

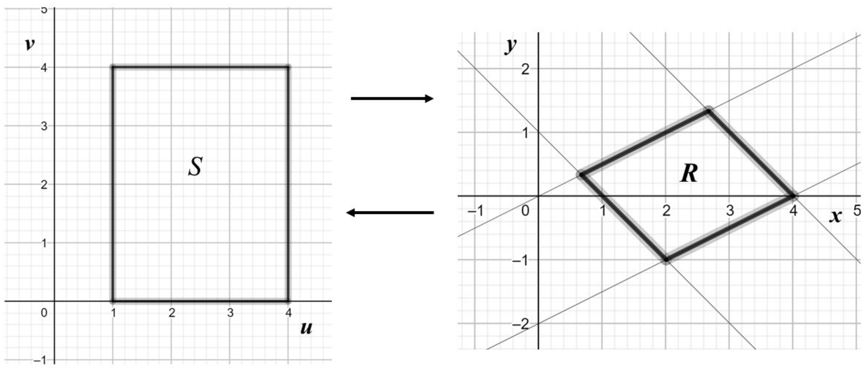
Además, con ese cambio de variables se tiene:

$x+y=1 \quad \to \quad u=1$

$x+y=4 \quad \to \quad u=4$

$x-2y=0 \quad \to \quad v=0$

$x-2y=4 \quad \to \quad v=4$



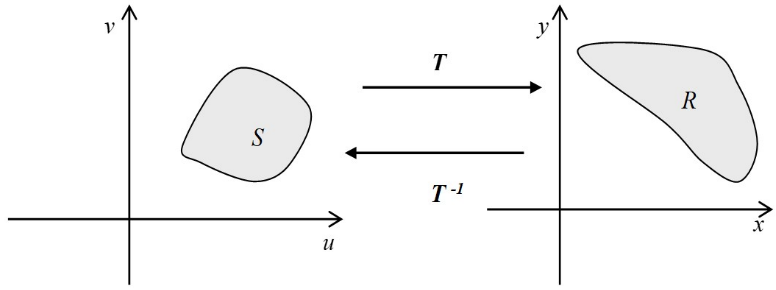
Veremos a continuación cómo se modifica el diferencial de área (dA) con un cambio de variables.

Un cambio de variables viene dado por una transformación T de una región S del plano uv en una región R del plano xy de la forma

$$T(u,v) = (x,y) = (X(u,v), Y(u,v))$$

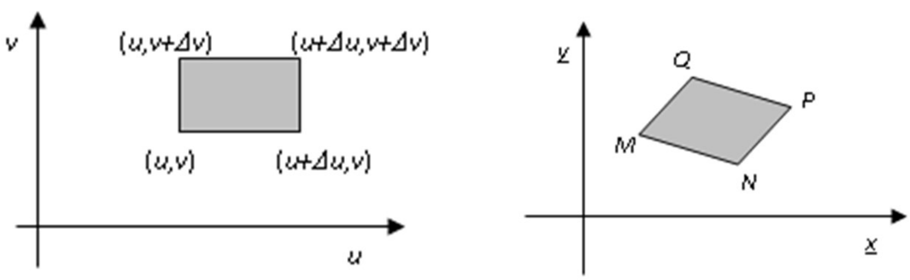
por la que cada punto (x,y) de R es imagen de un único punto (u,v) de S y donde X e Y tienen derivadas parciales continuas en cada punto de S. Siendo T uno a uno, existe la función inversa

$$T^{-1}(x,y) = (u,v) = (U(x,y), V(x,y))$$



Escribimos habitualmente: $T: \begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} u = U(x,y) \\ v = V(x,y) \end{cases}$

En esta situación, supongamos que S es un rectángulo de vértices (u,v); $(u+\Delta u, v)$; $(u+\Delta u, v+\Delta v)$; $(u, v+\Delta v)$. Las imágenes de esos vértices en el plano xy son los puntos M,Q,P y N y, siendo Δu y Δv pequeños, la imagen de S es aproximadamente un paralelogramo R determinado por los vectores $\vec{MN}$ y $\vec{MQ}$ cuya área es el módulo del producto cruz de esos vectores.



De acuerdo a lo dicho, es $\Delta R = \acute{a}rea(R) \approx \left| \vec{MN} \times \vec{MQ} \right|$ siendo :

$$\vec{MN} = \langle X(u+\Delta u, v) - X(u,v)\ ,\ Y(u+\Delta u, v) - Y(u,v) \rangle$$

$$\vec{MQ} = \langle X(u,v+\Delta v) - X(u,v)\ ,\ Y(u,v+\Delta v) - Y(u,v)\rangle$$

Si Δu y Δv son cercanos a cero,

$X(u+\Delta u,v)-X(u,v) \approx X_u(u,v)\Delta u \qquad Y(u+\Delta u,v)-Y(u,v) \approx Y_u(u,v)\Delta u$

$X(u,v+\Delta v)-X(u,v) \approx X_v(u,v)\Delta v \qquad Y(u,v+\Delta v)-Y(u,v) \approx Y_v(u,v)\Delta v$

En consecuencia,

$$\vec{MN} \approx \langle X_u(u,v)\Delta u, Y_u(u,v)\Delta u\rangle \qquad \vec{MQ} \approx \langle X_v(u,v)\Delta v, Y_v(u,v)\Delta v\rangle$$

o sea

$$\vec{MN} \approx \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \right\rangle \qquad \vec{MQ} \approx \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \right\rangle$$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, 0, \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u\Delta v \right\rangle$$

Entonces,

$$\Delta R \approx \left|\vec{MN} \times \vec{MQ}\right| \approx \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \right| \Delta u\Delta v$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

se llama *jacobiano de* x e y *respecto de* u y v (el nombre refiere al matemático alemán Carl Gustav Jacobi que vivió entre 1804 y 1851) . Usaremos la notación $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ o, a veces , ***J*, para referirnos al jacobiano**.

Con esa notación podemos escribir:

$$\Delta R \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u\Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta S$$

Ahora podemos enunciar:

Cambio de variables en la integral doble

Sean R y S regiones de los planos xy y uv relacionadas por $\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$ de tal manera que cada punto de R es imagen de un único punto de S, y sea f una función continua en R. Si X y Y tienen derivadas parciales continuas
en S y $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es distinto de cero en S entonces

$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|dA_{uv}$$

Nota: En las condiciones anteriores es posible demostrar que $J_T = \dfrac{1}{J_{T^{-1}}}$, es decir que el Jacobiano de una transformación y el de su inversa son inversos:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Ejemplo: Para completar el cálculo de $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA$ vean que,

siendo $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$ resulta $\begin{cases} x = \dfrac{2u+v}{3} \\ y = \dfrac{u-v}{3} \end{cases}$

y el jacobiano de x,y respecto de u y v es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto,

$$\iint_R \left(\frac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA \ = \int_1^4 \int_0^4 \left(\frac{v}{u}\right)^{20} \left| -\frac{1}{3}\right| dvdu = \frac{1}{3} \ \frac{u^{-19}}{-19}\bigg|_1^4 \ \frac{v^{21}}{21}\bigg|_0^4 = ...$$

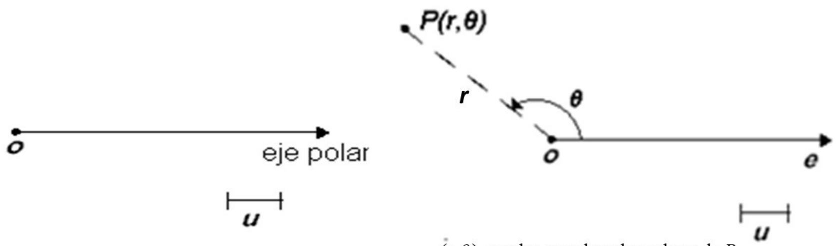
4.3.1. Ejercicios

Calculen usando un cambio de variables adecuado:
i) $\int\int_R (x-y)^9(x+y)^8 dA$ siendo $R = \{(x,y)/x \geq y-1, y \geq x, x+y \geq 1, x+y \leq 2\}$.
ii) el área de la región R limitada por $y = 4x+2$; $y = 4x+5$; $y = 3-2x$; $y = 1-2x$.
iii) el área de la región R limitada por $y = e^x$; $y = e^x+1$; $y = 3-e^x$; $y = 5-e^x$.

4.4. Coordenadas polares

Actividad: Grafiquen el sólido V limitado por los paraboloides $z = x^2+y^2$ y $z = 8-x^2-y^2$. Descríbanlo analíticamente.¿Cómo se calcula su volumen?

Sistema de coordenadas polares en el plano
Se define, a partir de un punto O llamado *polo*, una semirrecta horizontal llamada *eje polar* y una unidad de medida *u*.
Cualquier punto P del plano puede individualizarse en este sistema por medio de su distancia al polo (r) y la medida del ángulo entre el eje polar y el segmento $\bar{OP}$ que se ve en la figura siguiente (θ).



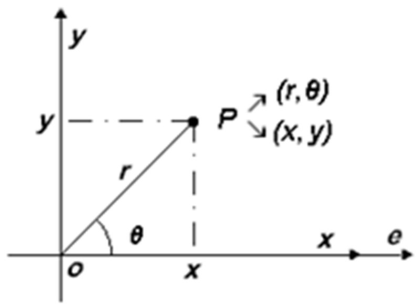
(r, θ) son las coordenadas polares de P

Cada par $(r,\, \theta)$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ corresponde a un único punto $P \neq (0,0)$. Los pares $(0,\, \theta)$ con $0 \leq \theta < 2\pi$ cualquiera, corresponden al $(0,0)$.

Aunque lo habitual es usar el ángulo que se encuentra entre 0 y 2π, noten que el punto representado por las coordenadas polares $(r,\, \theta)$ se representa también por $(r,\, \theta+2k\pi)$ donde k es un entero cualquiera.

En un sistema de coordenadas cartesianas ubiquemos un sistema polar haciendo coincidir el eje polar con el semieje positivo de las x.

Coordenadas polares



Entonces: $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\ \theta = \dfrac{y}{x} \quad si\ x \neq 0 \end{cases}$

$(\theta = \dfrac{\pi}{2}\ \ si\ \ x=0\ \ e\ \ y>0\ \ y\ \ \theta = \dfrac{3\pi}{2}\ \ si\ \ x=0\ \ e\ \ y<0)$

Dadas las coordenadas polares de un punto, podemos usar las igualdades anteriores para obtener sus coordenadas cartesianas y viceversa.

Ejemplos:

- Si $(4, \dfrac{\pi}{3})$ son las coordenadas polares de P, sus coordenadas cartesianas se calculan de la siguiente manera:

$$x = 4\ cos\frac{\pi}{3} = 2$$

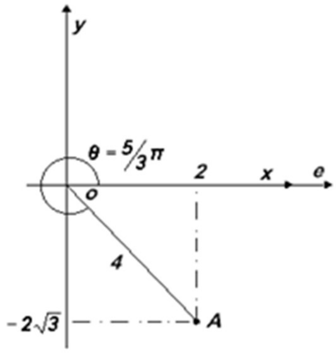
$$y = 4\ sen\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

- Si $(2, -2\sqrt{3})$ son las coordenadas cartesianas del punto P, sus coordenadas polares se calculan de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$tg\ \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

siendo P un punto del cuarto cuadrante, es $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$.



También podemos obtener la ecuación en coordenadas polares a partir de la ecuación en cartesianas y viceversa.

Ejemplos:

- $x^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = 2$

- $x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \rightarrow r^2 - 4rsen\theta = 0 \rightarrow r = 4sen\theta$

- $y = 1 \quad \rightarrow rsen\theta = 1$

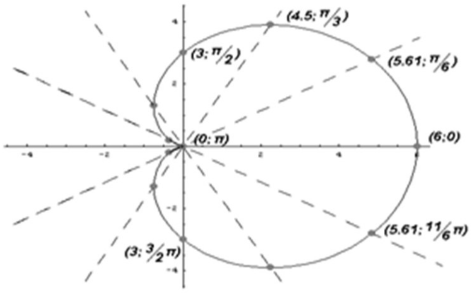
- $y = \sqrt{3}\, x \rightarrow tg\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} \;\vee\; \theta = \dfrac{4\pi}{3}$

- $\theta = \dfrac{\pi}{4} \rightarrow tg\theta = 1 \rightarrow y = x \;\; , \;\; x \geq 0$ (semirrecta)

- $r = 4cos\theta \rightarrow r^2 = 4rcos\theta \rightarrow x^2 + y^2 = 4x \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

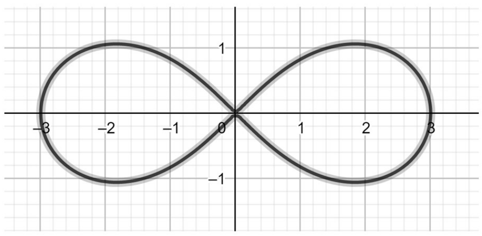
- $rcos\theta = 2 \quad \rightarrow x = 2$

- La curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 3(1 + cos\theta)$ es una *cardioide*. En la siguiente figura se ve una tabla con valores aproximados de r para algunos valores de θ y se ve la curva graficada.



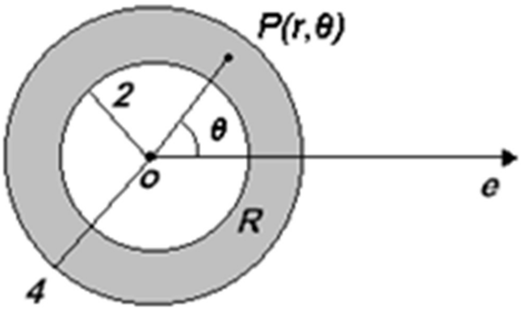
θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1
r	6	5.61	4.5	3	1.5	0.39	0	0.39	1.5	3	4.5	5.61	6

- $r^2 = 9cos2\theta \rightarrow r^4 = 9r^2(cos^2\theta - sen^2\theta) \rightarrow (x^2+y^2)^2 = 9(x^2-y^2)$
  Esta curva es una *lemniscata* o *lemniscata de Bernoulli*. Pueden verla graficada en la siguiente figura.



Para algunas regiones del plano, la descripción en coordenadas polares es mucho más sencilla que en coordenadas cartesianas. Piensen por ejemplo en la región limitada por las circunferencias $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=16$.

Las ecuaciones de las curvas que limitan a la región en coordenadas polares son $r=2$ y $r=4$.



Los puntos que pertenecen a la región tienen coordenada polar r entre 2 y 4 y no hay ninguna restricción para el ángulo θ. Podemos escribir:

$$R = \{(r, \theta)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq r \leq 4\}$$

4.4.1. Ejercicios

Grafiquen en el plano xy las regiones que se definen a continuación y descríbanlas luego en coordenadas polares.

i) R limitada por $x^2 + y^2 = 4$; $y = x$ e $y = -x$ con $y \geq 0$.

ii) R limitada por $x^2 + y^2 = 4$; $y = 4$; $y = \sqrt{3}\, x$; $y = -\sqrt{3}\, x$; con $y \geq 0$.

iii) R limitada por $x^2 + y^2 = 4$ e $y = 1$ con $y \geq 1$.

iv) R limitada por $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

v) R limitada por $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

vi) R limitada por $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

vii) $R = \{(x, y)/x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

4.5. Cambio de variables en la integral doble usando coordenadas polares

Dada $\iint_R f(x,y)dA$, donde f es una función continua en la región del plano cerrada y acotada R, plantearemos su cálculo con el cambio de variables definido por

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$$

El jacobiano de x e y con respecto a r y θ es:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \\ -rsen\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$$

Cambio de variables cartesianas a polares

Suponiendo que la región R en las coordenadas polares r y θ, se describe

$$R = \{(r,\theta)/\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \ \wedge g(\theta) \leq r \leq h(\theta)\}$$

resulta:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

Ejemplos:

- Plantear el cálculo de $\iint_R [8-2(x^2+y^2)]dA$ con $R = \{(x,y)/x^2+y^2 \leq 4\}$, usando coordenadas polares.

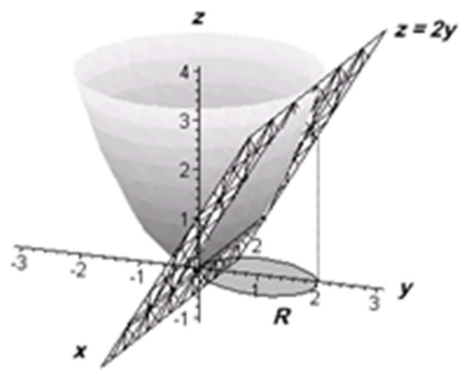
  R es un círculo de radio 2 que podemos describir en coordenadas polares diciendo: $R = \{(r,\theta)/0 \leq \theta < 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 2\}$.
  Además, siendo $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$, el integrando se transforma de la siguiente manera:

  $$8 - 2(x^2+y^2) \quad \rightarrow \quad 8 - 2r^2$$

Entonces:

$$\iint_R [8 - 2(x^2 + y^2)]dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [8 - 2r^2] r dr d\theta)$$

- Plantear el cálculo del volumen del sólido V limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$ usando coordenadas polares.



Eliminando z entre las dos ecuaciones de las superficies que limitan al sólido se obtiene la ecuación de un cilindro proyectante $x^2 + y^2 = 2y$ Observamos así que el sólido se proyecta en la región R limitada por $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y V se describe de la siguiente manera:

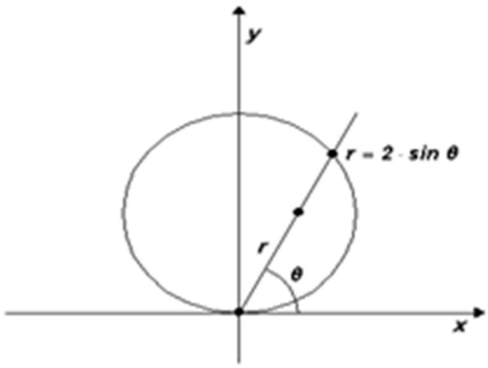
$$V = \Big\{ (x, y, z)/(x, y) \in R \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 2y \Big\}$$

por lo que

$$vol(V) = \int \int_R [2y - (x^2 + y^2)]dA$$

Con el cambio de variables $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$,

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad r = 2sen\theta$$



Así que la región R se describe de la siguiente manera en términos de r y θ:

$$R = \{(r, \theta)/0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 2sen\theta\}$$

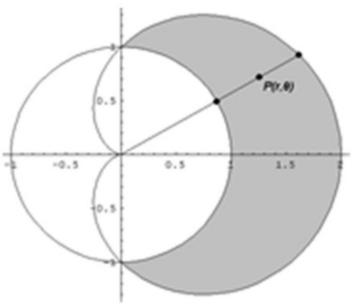
Además,

$$2y - (x^2 + y^2) \quad \rightarrow \quad 2rsen\theta - r^2$$

Entonces,

$$vol(V) = \iint_R [2y - (x^2 + y^2)]dA = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen\theta} (2rsen\theta - r^2)rdrd\theta$$

- Plantear el cálculo del área de la región del plano interior al cardioide $r = 1 + cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 1$ usando coordenadas polares.



$$\acute{a}rea(R) = \iint_R dA$$

En la región R , el ángulo θ toma valores comprendidos entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ y entre $\dfrac{3\pi}{2}$ y 2π. Por su parte, r toma valores que van desde 1 hasta $1+cos\theta$.

$$R=\left\{(r,\theta)/[0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi]\wedge 1\leq r\leq 1+cos\theta\right\}$$

Así, $\quad área(R)=\displaystyle\iint_R dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+cos\theta}rdrd\theta+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_1^{1+cos\theta}rdrd\theta$

R podría describirse también de la siguiente manera:

$$R=\left\{(r,\theta)/-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ 1\leq r\leq 1+cos\theta\right\}$$

de modo que: $\quad área(R)=\displaystyle\iint_R dA=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+cos\theta}rdrd\theta$

4.5.1. Ejercicios

1. Integren: i) $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2}dA$ siendo R la región limitada por $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$ ii) $\displaystyle\iint_R\frac{ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ siendo R la región limitada por $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=e$.

2. Calculen el área de las siguientes regiones:
   i) R limitada por $\theta=\dfrac{\pi}{4}$; $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ y $r=4cos\theta$.
   ii) R exterior a $r=4$ e interior a $r=8sen\theta$.
   iii) R interior a $r=1$ y exterior a la cardioide $r=1+cos\theta$.
   iv) R limitada por la lemniscata $r^2=9cos2\theta$.
   v) R limitada por $rsen\theta=4$; $\theta=\dfrac{\pi}{4}$; $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Calculen el volumen de los sólidos que se describen a continuación:
   i) V limitado por $x^2+y^2=4$; $z=0$ y $z=4-y$.
   ii) Esfera sólida de radio a.
   iii) V limitado por $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Calculen la masa de la placa metálica limitada por $x^2+(y-2)^2=4$; $y=x$; $y=-x$ e $y=8$ siendo $f(x,y)=x^2+y^2$ la función densidad de masa.

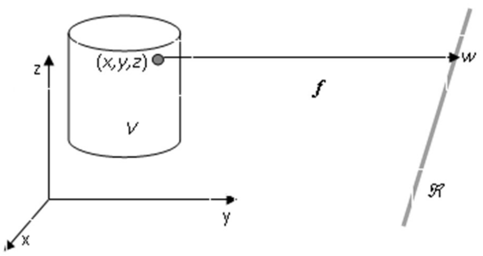
5. Calculen el valor promedio de $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ en el círculo definido por $x^2+y^2\leq a^2$.

Capítulo 5

Integral triple

5.1. Definición de integral triple

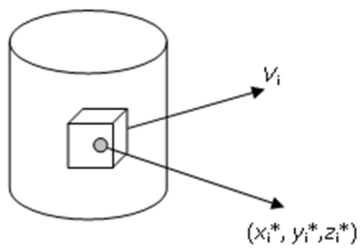
Sea V un sólido acotado cuya frontera sea unión finita de superficies suaves unidas a lo largo de curvas suaves o suaves a trozos, y sea $f(x, y, z)$ una función (escalar) a valores reales, definida y acotada sobre el sólido V.



Supongamos que V está incluido en el paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Trazando, por un número finito de puntos de $[a, b]$, de $[c, d]$ y de $[e, f]$, planos paralelos a los planos coordenados, el paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ queda dividido en un número finito de paralelepípedos V_i con volumen ΔV_i. Supongamos que $V_1, V_2, ..., V_k$ son los que están incluidos en V .
$\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ es una *partición* de V y su norma es la mayor de todas las longitudes de las diagonales de los V_i.

Sea $P_i^* \in V_i$ (cualquiera) y sea

$$J_k = \sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\Delta V_i$$



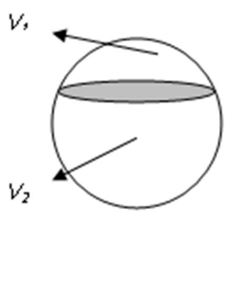
La integral triple de $f(x, y, z)$ sobre V que se denota $\iiint_V f(x, y, z)dV$, es el límite de J_k para $\left|\mathcal{P}\right| \to 0$, si ese límite existe y es un número real que no depende de las particiones ni de los P_i^* considerados.

Si $f(x, y, z)$ es continua sobre V o es acotada y tiene a lo sumo discontinuidades en un número finito de subconjuntos de V de volumen nulo, entonces f es integrable sobre V.

Propiedades de la integral triple

1. **Aditividad en el sólido de integración:** Si f es integrable sobre $V = V_1 \cup V_2$ donde V_1 y V_2 tienen en común a lo sumo puntos de una superficie , entonces

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z)dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z)dV$$



2. **Linealidad:** Si f y g son integrables sobre V y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\iiint_V (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \iiint_V f dV + \beta \iiint_V g dV$$

3. **Monotonía:** Si f y g son integrables sobre V y $\forall (x,y,z) \in V$ es $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, entonces

$$\iiint_V f\ dV \leq \iiint_V g\ dV$$

4. **Propiedad de acotamiento:** Si $\Big|f(x,y,z)\Big| \leq M \ \ \forall (x,y,z) \in V$,

$$\left| \iiint_V f\ dV \right| \leq M vol(V)$$

Teorema del valor medio

Si $f(x,y,z)$ es continua en $V \subset \mathbb{R}^3$ entonces existe $P^* \in V$ tal que

$$\iiint_V f(x,y,z) dV = f(P^*)\ vol(V).$$

Siendo $f(x,y,z)$ integrable sobre V, se llama *valor promedio de f en V* a f_P

$$f_P = \frac{\iiint_V f(x,y,z) dV}{vol(V)}$$

Así el teorema anterior puede ser enunciado de la siguiente manera: Si $f(x,y,z)$ es continua en $V \subset \mathbb{R}^3$ entonces el valor promedio de f en V coincide con el valor de f en algún $P^* \in V$.

Aplicaciones de la integral triple

- $\displaystyle\iiint_V dV = Volumen(V),$
- Si $f(x,y,z)$ es la función densidad volumétrica de masa, continua y $f(x,y,z) \geq 0$ en todos los puntos de V, entonces

$$\iiint_V f(x,y,z) dV = Masa(V)$$

- **Centro de masa de un sólido** V $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ Si $f(x,y,z)$ es la función densidad volumétrica de masa, y f es continua y $f(x,y,z) \geq 0$ en todos los puntos de V, entonces

$$\overline{x} = \frac{\iiint_V xf(x,y,z)dV}{masa(V)}$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint_V yf(x,y,z)dV}{masa(V)}$$

$$\overline{z} = \frac{\iiint_V zf(x,y,z)dV}{masa(V)}$$

El centro de masa de un sólido se puede suponer como el punto donde esta concentrada toda la masa y donde confluyen las fuerzas externas que actúan sobre él. Es sumamente útil conocer el centro de masa, porque facilita resolver problemas de mecánica en los que se necesita describir o conocer el movimiento de objetos sometidos a diversas fuerzas.

5.1.1. Cálculo de la integral triple

Si el sólido V es *proyectable* sobre el plano xy , o sea, si existe una región R_{xy} del plano xy y dos funciones continuas $g(x,y)$ y $h(x,y)$ tales que

$$V = \{(x,y,z)/(x,y) \in R_{xy} \wedge g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$$

siendo $f(x,y,z)$ continua en V,

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iint_{R_{xy}} [\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz]dA_{xy}$$

(la integral doble se calculará a su vez integrando respecto de x y respecto y de acuerdo a la descripción que se haga de R_{xy} o bien también realizando un cambio de variables)

Describan ustedes en qué condiciones un sólido es proyectable sobre el plano xz y cuándo es proyectable sobre el plano yz y cómo se calcula la integral triple en estos casos.

5.1.2. Ejercicios

1. Calculen las siguientes integrales. Describan el sólido sobre el que se integra y hagan un esquema gráfico del mismo.
   i) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2y^2z\,dzdydx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dzdydx$

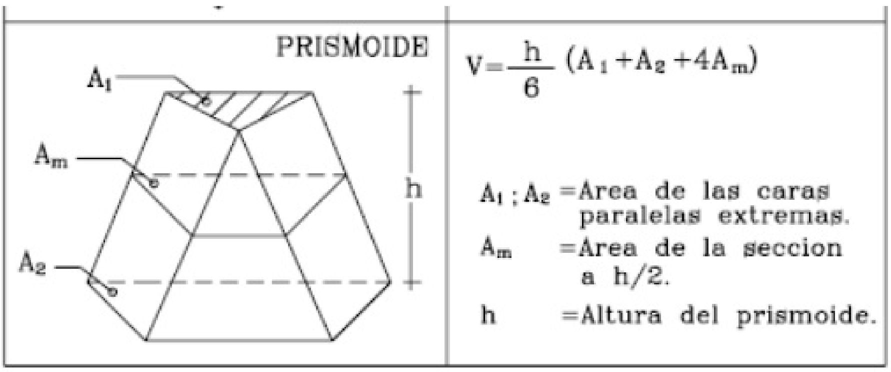
2. i) Comprueben que $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dxdydz = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dydzdx$
   ii) Interpreten geométricamente el resultado de la integral.

3. En los siguientes incisos, describan el sólido limitado por las superficies dadas y calculen su volumen mediante una integral triple.
   i) $x + y + 2z = 2$; $2x + 2y + z = 4$ (en el primer octante) .
   ii) $z = 0$; $z = y^2$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 1$; $y = -1$.
   iii) $x + z = 1$; $y + 2z = 2$ (en el primer octante) .
   iv) $x^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 1$ (en el primer octante) .
   v) $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $x + z = 3$.

4. Calculen el valor promedio de $f(x, y, z) = xyz$ en el cubo limitado por los planos coordenados y por $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

5. Calculen la masa del sólido limitado por $x + y + z = 2$ y los planos coordenados , siendo $\rho(x, y, z) = 2x$ la función densidad de masa.

6. Hallar el volumen de un *prismoide* como se muestra en la figura y probar que es igual a $V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$, donde A_1 y A_2 son las bases de la figura, h es la altura (distancia entre las dos caras paralelas) y A_m el área de la sección con plano a mitad de altura ($h/2$) entre las dos caras paralelas.



Nota: En geometría, un *prismatoide* es un poliedro cuyos vértices se encuentran en dos planos paralelos. Sus caras laterales pueden ser trapezoides o triángulos. Si ambos planos tienen el mismo número de vértices, y las caras laterales son paralelogramos o trapezoides, se conocen como prismoides. Los prismoides se utilizan mucho en *topografía* en trabajos de ingeniería para calcular los volúmenes de tierra para desmontes o terraplenes.

5.2. Cambio de variables en la integral triple

Sean V y V^* subconjuntos del espacio xyz y uvt respectivamente, que están relacionados por

$$\begin{cases} x = X(u,v,t) \\ y = Y(u,v,t) \\ z = Z(u,v,t) \end{cases}$$

de tal manera que cada punto de V es imagen de único punto de V^*.

Supongamos que $f(x,y,z)$ es continua en V, que X, Y y Z tienen derivadas parciales continuas en V^* y que, en V^*, *el jacobiano* de x,y y z respecto de u, v y t es diferente de cero, o sea:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

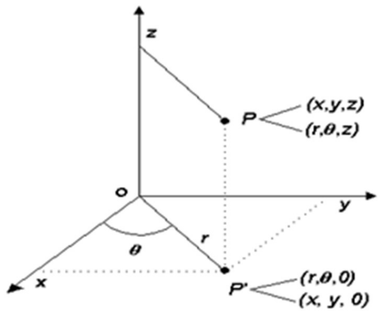
$$\iiint_V f(x,y,z)dV_{xyz} = \iiint_{V^*} f(X(u,v,t),Y(u,v,t),Z(u,v,t))\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\Big|dV_{uvt}$$

5.3. Coordenadas cilíndricas

Se asigna a cada punto $P=(x,y,z)$ la terna (r,θ,z) donde (r,θ) son las coordenadas polares de la proyección en el plano xy del punto P y z es la coordenada original.
(r,θ,z) son las coordenadas cilíndricas del punto P y esas coordenadas verifican:

$$r \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad ; \quad z \in \mathbb{R}$$

Coordenadas cilíndricas



La relación entre ambas ternas está dada por: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\ \theta = \dfrac{y}{x} \quad si\ x \neq 0 \end{cases}$

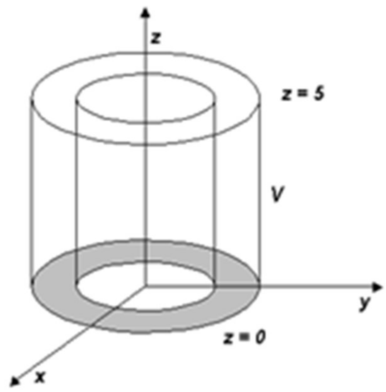
$(\theta = \dfrac{\pi}{2}\ \ si\ \ x = 0\ \ e\ \ y > 0\ \ y\ \ \theta = \dfrac{3\pi}{2}\ \ si\ \ x = 0\ \ e\ \ y < 0)$

(Se podría también ubicar el sistema polar en el plano xz y mantener la coordenada y original o ubicar el sistema polar en yz y mantener la coordenada x original).

Actividad

- Obtengan las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) son $(1, \dfrac{\pi}{6}, -3)$.
- Obtengan las coordenadas cilíndricas del punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(1, -1, 2)$.
- Grafiquen las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas cilíndricas son: i) $r = 2$ ii) $\theta = 0$ iii) $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ iv) $r = 2sen\theta$
- Escriban las ecuaciones en coordenadas cilíndricas de las siguientes superficies: i) $x^2 + y^2 = 1$ ii) Semiplano $y = x\ \ ; con\ \ x \geq 0$
iii) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ iv) $z = x^2 + y^2$ v) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

La descripción en coordenadas cilíndricas de algunos sólidos es mucho más sencilla que en coordenadas cartesianas. Piensen por ejemplo en el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$ y $z = 5$.



Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas de las superficies que limitan al sólido son: $r = 1$; $r = 3$; $z = 0$ y $z = 5$.

Los puntos que pertenecen al sólido tienen coordenada cilíndrica θ cualquiera (entre 0 y 2π), coordenada cilíndrica r entre 1 y 3 y z entre 0 y 5.

$$V = \{(r, \theta, z)/0 \leq \theta < 2\pi \wedge 1 \leq r \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 5\}$$

Actividad Grafiquen y describan en coordenadas cilíndricas el sólido V limitado en el primer octante por $x^2+y^2 = 9$; $x^2+y^2 = 16$; $y = x$; $y = \sqrt{3}\, x$; $z = 1$ y $z = 4$.

Cambio de variables en la integral triple usando coordenadas cilíndricas

Para el cambio de variables definido por

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{cases}$$

resulta

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Entonces, entendiendo que V^* es la descripción del sólido en coordenadas cilíndricas, el diferencial de volumen resulta:

$$dV = dx.dy.dz = dz.r.dx.dy$$

y la integral triple:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(rcos\theta, rsen\theta, z)r\ dzdrd\theta}$$

Ejemplos:

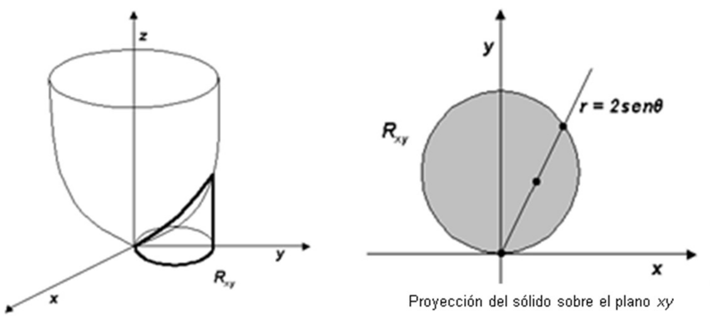
- Siendo V el sólido limitado por $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $z = x^2 + y^2$ y $z = 0$, plantear el cálculo de $\iiint_V f(x,y,z)dV$ usando coordenadas cilíndricas.

  Escribamos las ecuaciones de las superficies que limitan al sólido en coordenadas cilíndricas:

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2y \quad \rightarrow \quad r = 2sen\theta$$

$$z = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad z = r^2$$

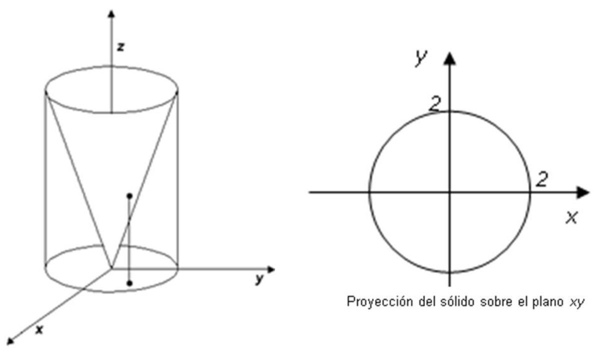


$$V = \left\{(r,\theta,z)/0 \leq \theta \leq \pi \ \wedge 0 \leq r \leq 2sen\theta \ \wedge 0 \leq z \leq r^2\right\}$$

Entonces:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta}\int_0^{r^2} f(rcos\theta, rsen\theta, z)rdzdrd\theta$$

- Plantear el cálculo de $\int\int\int_V (x^2+y^2)dV$ siendo V el sólido limitado por $x^2+y^2=4$; $z=0$ y $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Escribamos las ecuaciones de las superficies que limitan al sólido en coordenadas cilíndricas:

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

$$x^2+y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad r = 2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad z = r$$

$$V = \{(r, \theta, z)/0 \leq \theta < 2\pi \ \wedge 0 \leq r \leq 2 \ \wedge 0 \leq z \leq r\}$$

Además, el integrando $(x^2 + y^2)$ se transforma en r^2. Entonces:

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r^3 dz dr d\theta$$

5.3.1. Ejercicios

1. Calculen usando coordenadas cilíndricas $\iiint_V xyzdV$ siendo V el sólido limitado por $x^2+y^2+z^2 = 16$ y los planos coordenados en el primer octante.

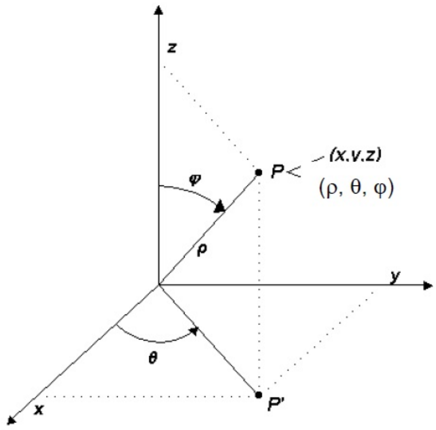
2. Calculen el volumen de los siguientes sólidos usando coordenadas cilíndricas:
   i) V limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$.
   ii) V limitado por $2y = x^2+z^2$ y $x^2+y^2+z^2 = 3$ (en este caso conviene ubicar el sistema polar en el plano xz).
   iii) V limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
   iv) V limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Calculen la masa del sólido limitado por $x^2+y^2+z^2 = 16$ en el interior de $x^2 + y^2 = 4x$ y en el primer octante, suponiendo que $\delta(x, y, z) = z$ es la función densidad de masa.

5.4. Coordenadas esféricas

Coordenadas esféricas

A cada punto P con coordenadas cartesianas (x, y, z) se le asigna la terna (ρ, θ, φ) donde: ρ es la distancia desde P hasta el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$); θ es el ángulo medido desde x^+ hasta el segmento $\bar{OP'}$ siendo $P' = (x, y, 0)$ la proyección de P en el plano xy, como muestra la figura; φ es el ángulo medido desde z^+ hasta $\bar{OP}$.



(ρ, θ, φ) son las *coordenadas esféricas* del punto P y verifican:

$$\rho \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

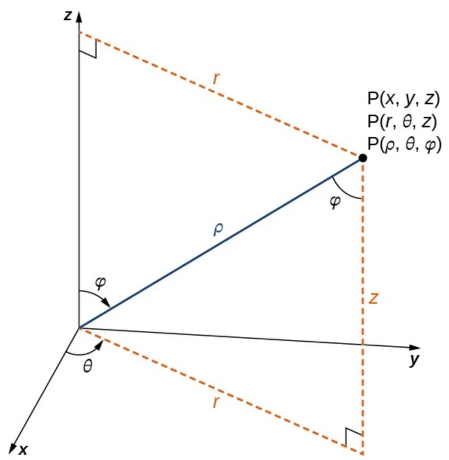
La relación entre las coordenadas cartesianas de $P = (x, y, z)$ y sus coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) está dada por:

$$\begin{cases} x = \rho \; cos\theta \; sen\varphi \\ y = \rho \; sen\theta \; sen\varphi \\ z = \rho \; cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \quad (si \; x \neq 0) \\ tg\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (si \; z \neq 0) \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \; o \; \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

El siguiente gráfico muestra la relación entre las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Las ecuaciones que convierten de un sistema a otro se derivan de relaciones en el triángulo rectángulo.



Notar que existe una vinculación entre las *coordenadas cilíndricas* y *esféricas* del siguiente modo: Siendo que

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$$

Entonces observando el triángulo O P´ P: se tiene que

$$r = \rho\ sen(\varphi)$$

De este modo es más sencillo recordar la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas (pasando antes por la relación entre las coordenadas cilíndricas y el radio r) del siguiente modo:

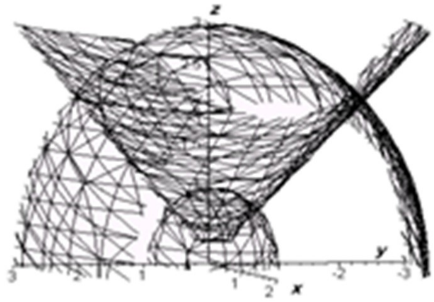
$$\begin{cases} x = r\ cos\theta\ = (\rho\ sen\varphi)cos\theta \\ y = r\ sen\theta = (\rho\ sen\varphi)sen\theta \\ z = \rho\ cos\varphi \end{cases}$$

Actividad

- Hallen las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas esféricas son $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$
- Hallen las coordenadas esféricas del punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(1, 1, 1)$
- Grafiquen las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son: i) $\rho = 4$ ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ iii) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

- Escriban la ecuación en coordenadas esféricas de las siguientes superficies:
  i) $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ ii) $z=4$ iii) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ iv)$y=\sqrt{3}\,x$
  v) $x^2+y^2+z^2=4$ vi) $z=x^2+y^2$

La descripción analítica de algunos sólidos es en coordenadas esféricas más sencilla que en coordenadas cartesianas. Veamos por ejemplo el sólido limitado por $x^2+y^2+z^2=1$; $x^2+y^2+z^2=9$ y $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Las ecuaciones en coordenadas esféricas de las superficies que limitan al sólido son:

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \rightarrow \quad \rho=1$$

$$x^2+y^2+z^2=9 \quad \rightarrow \quad \rho=3$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad 1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad \rightarrow \quad 1=tg\varphi \quad \rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Los puntos que pertenecen al sólido tienen coordenada θ que toma cualquier valor entre 0 y 2π ; coordenada φ que toma valores entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y coordenada ρ tomando valores entre 1 y 3.

$$V=\left\{(\rho,\theta,\varphi)/0\le\theta<2\pi \ \wedge\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\ \wedge 1\le\rho\le 3\right\}$$

Actividad describan en coordenadas esféricas los siguientes sólidos:

- V limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=4$.
- V limitado por $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y los planos coordenados en el primer octante.

- V limitado por $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ y $z = 4$.
- V limitado por $y = x$; $y = \sqrt{3}\,x$; $x^2+y^2+z^2 = 4$ y $x^2+y^2+z^2 = 16$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0$.
- V limitado por $x^2+y^2+z^2 = 4$; $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 4$.

Cambio de variables en la integral triple usando coordenadas esféricas.

Para el cambio de variables definido por

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta\ sen\varphi \\ y = \rho\, sen\theta\ sen\varphi \\ z = \rho\, cos\varphi \end{cases}$$

resulta

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -\rho^2 sen\varphi \quad (verifiquen)$$

Entonces, entendiendo que V^* es el sólido V descripto en coordenadas esféricas resulta, para f continua sobre V:

$$\boxed{\begin{gathered} \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iiint_{V^*} f(\rho\, cos\theta\ sen\varphi, \rho\, sen\theta\ sen\varphi, \rho\, cos\varphi)\rho^2 sen\varphi d\rho d\varphi d\theta \end{gathered}}$$

Ejemplo: Plantear usando coordenadas esféricas el cálculo del volumen del sólido limitado por $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $\sqrt{3}\,z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Las superficies que limitan al sólido son :
una superficie esférica: $x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \rho = 1$
y un semicono : $\sqrt{3}\,z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad tg\varphi = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$.

$$V = \left\{ (\rho,\theta,\varphi)/0 \leq \theta \leq 2\pi\ \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\ \wedge 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$$

Entonces:

$$vol(V) = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^2 sen\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Observación

En este capítulo hemos encontrado distintas formas de describir un mismo sólido V en 3D, utilizando para ello el sistema de coordenadas más conveniente según sea la *geometría* de V. Emplear un sistema (u otro) de coordenadas tendrá ventajas y desventajas que se debe analizar al tratar de obtener la solución buscada a un problema. Notar que *la solución no dependerá del sistema de coordenadas escogido*, y en principio cualquier sistema (bien aplicado) sirve para resolverlo. Una buena elección del sistema, puede lograr que los cálculos para resolver el problema sean mucho más sencillos que con otro.

En general las *coordenadas cartesianas* sirven muy bien para describir sólidos cuyas superficies por borde incluyen planos. En el caso que las superficies que son borde del sólido, poseen una *simetría cilíndrica* (cilindros circulares rectos, paraboloides, conos) es útil en estos casos describir V usando *coordenadas cilíndricas*. Por último, cuando el sólido posea una simetría esférica (esferas) es conveniente utilizar *coordenadas esféricas*.

En física, es muy común utilizar coordenadas cilíndricas o esféricas para modelar sistemas tridimensionales con simetrías específicas. Las coordenadas cilíndricas, modelan sistemas que exhiben una simetría cilíndrica, como cilindros, tubos o estructuras alargadas, flujos en tuberías o conductos cilíndricos, distribución de carga eléctrica o corriente en estructuras como cables o conductores, ondas sonoras o vibraciones en tubos o cilindros, procesos termodinámicos en sistemas con pistones y cilindros, las coordenadas cilíndricas son útiles para describir la expansión y compresión de gases, entre otros. Las coordenadas esféricas, modelan sistemas con simetría esférica o radial, como planetas, átomos o partículas que irradian desde un punto, campos gravitatorios y eléctricos en torno a objetos con simetría esférica, ondas que se propagan desde una fuente puntual, como ondas de sonido o ondas electromagnéticas en el espacio, entre otros.

5.4.1. Ejercicios

1. Calculen usando coordenadas esféricas el volumen de los siguientes sólidos:
   i) V limitado por $x^2+y^2+z^2=4$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $\sqrt{3}z=\sqrt{x^2+y^2}$.
   ii) V limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=1$.

iii) V limitado por arriba por el semicono $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ y por debajo, por la esfera $\rho = 2cos\varphi$
iv) V limitado por $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=16$ y $z=0$.

2. En los siguientes incisos calculen el valor promedio de f en el sólido dado.
   i) $f(\rho,\theta,\varphi)=\rho$ en el sólido definido por $\rho \leq 1$

   ii) $f(\rho,\theta,\varphi)=\rho cos\varphi$ en el sólido definido por $\rho \leq 1$ y $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$

3. En los siguientes incisos el volumen del sólido V haciendo un cambio de variables adecuado.

   i) V limitado por $z=x^2+y^2$; $x^2+y^2-y=0$ y $z=0$.

   ii) V limitado por $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ y $x^2+y^2=6z$.

   iii) V limitado por $4=x^2+y^2$; $x^2+y^2=2z$ y $z=0$.

   iv) V limitado por $x^2+y^2+(z-1)^2=1$; $x^2+y^2=6z$ y $z=1$.

   v) V limitado por arriba por $z=9-x^2-y^2$ por debajo por $z=0$ y con $x^2+y^2 \geq 1$

   vi) V limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=1$ y $z=2$.

   vii) V limitado por arriba por $x^2+y^2+z^2=4$ y por debajo por $z=1$.

Capítulo 6

Integral de línea

6.1. Introducción al Cálculo Vectorial

Para avanzar con el estudio de los temas necesitaremos algunos conceptos referidos a magnitudes escalares, vectoriales y sus operaciones, además de los ya estudiados en Matemática A (concepto de vector, sus componentes y operaciones de suma y producto por escalar).

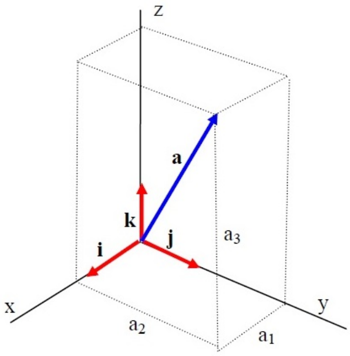
- **Magnitud escalar**: es aquella que queda totalmente determinada dando un sólo número real y una unidad de medida. Fenómenos/situaciones que se modelan por una magnitud escalar, son: tiempo, medidas de longitud, medidas de superficie, masa, densidad, volumen, potencia, temperatura, trabajo, presión, energía.
- **Magnitud vectorial**: es aquella que queda determinada completamente mediante un número real, una unidad de medida, una dirección y un sentido. Ejemplo: fuerza, velocidad, momento/momentun, torque (producto vectorial de dos fuerzas), gradiente y aceleración.

Para representar las magnitudes vectoriales se toman *segmentos orientados*, es decir, segmentos de recta cada uno de ellos determinado entre dos puntos extremos dados en un cierto orden. Estos segmentos orientados se denominan comúnmente **vectores**. Se componen de un segmento, un punto inicial (origen) y de un puntos final o extremo. La recta que contiene al vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su sentido.

A los vectores de **módulo unidad** se los denomina **versores**. A los versores se los indica comúnmente con una letra en negrita sobre la que se coloca una v derecha o invertida, según el autor.

Sea (O; x, y, z) un sistema de coordenadas ortogonales. Sobre cada uno de los ejes, y con su sentido coincidente con el sentido positivo de aquellos, se colocan los versores i, j, k. Sus componentes son $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$ y se denominan versores fundamentales.

Todo vector (a_1, a_2, a_3) puede ser entonces escrito en la forma $(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Esta descomposición canónica de un vector como suma de tres vectores en la dirección de los ejes coordenados es muy importante y útil.



6.1.1. Producto escalar

El *producto escalar* (también llamado producto punto) es una operación entre dos vectores

$$\vec{u}, \vec{v}$$

(denominada a veces como producto punto) que da como resultado un número (un escalar), y está definido como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

Considerando las componentes de los dos vectores el producto escalar se calcula por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

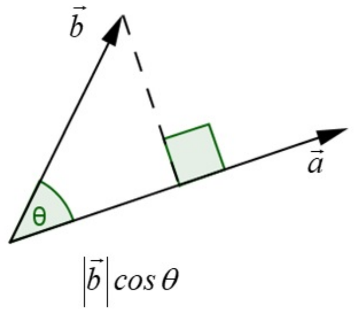
Usando ese resultado es posible establecer el siguiente criterio para determinar si dos vectores son perpendiculares (ortogonales):

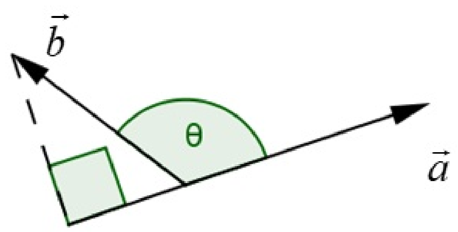
Propiedades :

- Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son perpendiculares si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- el vector $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es unitario, su módulo es 1.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

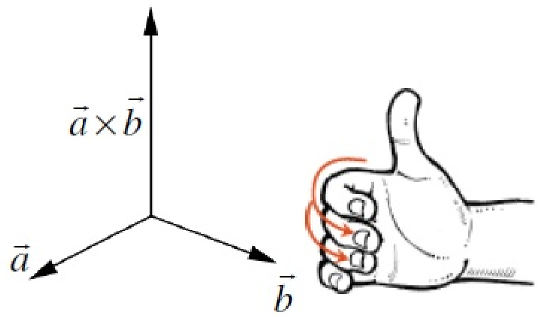
La **proyección ortogonal de un vector** $\vec{b}$ sobre un vector $\vec{a}$ es un vector en la dirección de $\vec{a}$ cuya magnitud es (componente de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$) $|\vec{b}| \cos\theta$ donde $\cos\theta$ es el ángulo entre los dos vectores. Notar que si $\pi/2 < \cos\theta < \pi$ esa magnitud es negativa.





6.1.2. Producto vectorial

El *producto vectorial* (o también llamado producto cruz) es una operación entre dos vectores de dimensión 3, y el resultado es un vector ortogonal al plano formado por los dos vectores y tiene la dirección según el giro de la mano derecha.



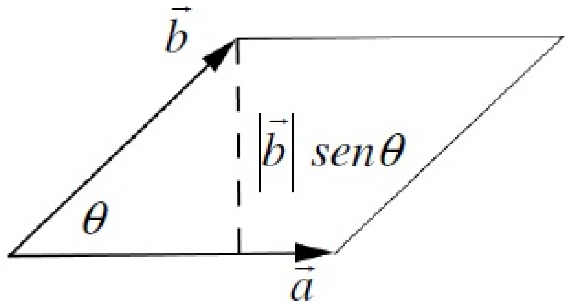
En coordenadas cartesianas el vector resultado del producto vectorial es posible calcularlo mediante una operación que se denomina determinante

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los Vectores unitarios en la dirección de los tres ejes x, y, z.

Propiedades

- $\vec{u}\times\vec{v}$ corresponde a un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyo módulo es $|\vec{u}\times\vec{v}| = |u||v|\sin\theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores.
- $|\vec{u}\times\vec{v}|$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos (colineales) si y sólo si $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
- $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$



Producto mixto

El producto mixto es una expresión entre 3 vectores

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$$

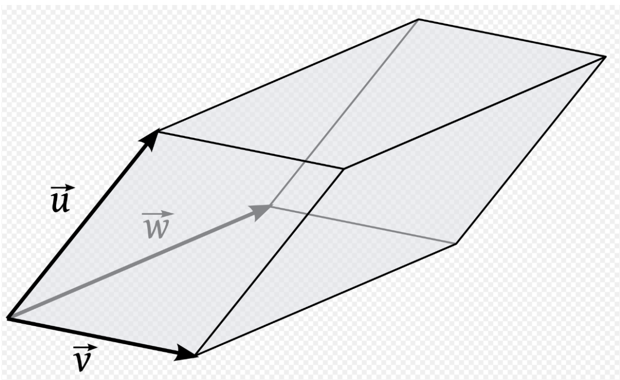
y se define por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

y está definido como

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Para tres vectores no coplanares, el valor absoluto del producto mixto da por resultado el volumen del paralelepípedo que se forma con esos vectores.



6.2. Curvas en el plano y en el espacio

Nuestro próximo paso será el estudio de la integral de línea. El dominio de integración pasará a ser una curva del plano o del espacio y el integrando un *campo escalar* (función a valores reales) o la componente de un *campo vectorial* en una dirección dada, definidos sobre la curva. Para poder abordar la definición, el cálculo y las propiedades de este nuevo tipo de integrales nos ocuparemos previamente de las curvas y su representación vectorial paramétrica, y de los campos vectoriales.

6.3. Parametrización de curvas

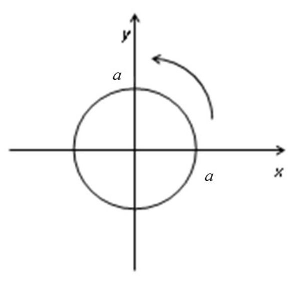
Toda curva plana puede darse por un par de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

donde I es un intervalo de números reales llamado intervalo paramétrico y $X(t)$ e $Y(t)$ son funciones a valores reales.

Ejemplo:

Para $a > 0$, $\begin{cases} x = a\ cos\ t \\ y = a\ sen\ t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$ son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia que tiene radio a y centro en el origen de coordenadas: $x^2 + y^2 = a^2$. Observemos que las ecuaciones paramétricas definen la curva y le imprimen una *orientación*: en este caso, al considerar valores crecientes de t, recorremos la curva en el sentido indicado por la flecha en el siguiente dibujo (sentido antihorario), iniciando ese recorrido en el punto de coordenadas $(a, 0)$ y finalizando en el mismo punto.



- Para el estudio de los temas de este capítulo puedes ayudarte de las aplicaciones creadas en **GeoGebra**.

Actividad:

- Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a\ sen\ t \\ y = a\ cos\ t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ corresponden a la misma circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. ¿Cuál es la orientación que esta parametrización imprime a dicha circunferencia?

- Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a\ cos\ (2t) \\ y = a\ sen\ (2t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ también definen la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Al tomar t todos los valores desde 0 hasta 2π, ¿cuántas veces se recorre la curva?

- Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3\ cos\ t \\ y = 4\ sen\ t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ corresponden a una elipse: despejando $cos\ t$ y $sen\ t$ y considerando que $sen^2\ t + cos^2\ t = 1$, se obtiene: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Grafiquen esa elipse e indiquen en el gráfico la orientación definida por la parametrización dada.

Para las siguientes curvas, hallen la ecuación en x e y, grafiquen e indiquen en el gráfico la orientación, el punto inicial y el punto final.

$C_1 : \begin{cases} x = 2\ cos(-t) \\ y = 3\ sen(-t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad C_2 : \begin{cases} x = 2 + 4cos\ t \\ y = 3 + 3sen\ t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$C_3 : \begin{cases} x = 1 + 2sent \\ y = 2 + 2cost \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad C_4 : \begin{cases} x = 2 + 4cos\ t \\ y = 3 + 3sen\ t \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Escriban ecuaciones paramétricas para:
i) la circunferencia con centro en $(2, 3)$ y radio $\sqrt{2}$ recorrida en sentido antihorario, con punto inicial $(2 + \sqrt{2}, 3)$
ii) la porción de elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, ubicada en el primer cuadrante, desde $(2, 0)$ hasta $(0, 3)$.
iii) $(x - 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 4$ recorrida en sentido horario, con punto inicial $(3, 3)$

- Verifiquen que las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ $t \in [0, 1]$ corresponden al segmento de recta desde $(1, 2)$ hasta $(3, 5)$.

  Vean si las siguientes ecuaciones paramétricas corresponden al mismo segmento de recta. Grafiquen e indiquen la orientación en cada caso.
  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases}$ $t \in [1, 3]$ $\quad$ $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ $t \in [-1, 0]$

  Escriban ecuaciones paramétricas para:
  i) el segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(4, -3)$
  ii) el segmento de recta desde $(5, 2)$ hasta $(1, -1)$

- Dada $y = 1 - x^2$, haciendo $x = t$ se tiene la *parametrización trivial*:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

  Grafiquen e indiquen la orientación de la parábola definida por esta parametrización.
  Consideren luego las siguientes ecuaciones paramétricas, vean si corresponden a la misma curva, grafiquen e indiquen la orientación.

  $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 1 - t \end{cases}$ $t \geq 0$

  $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ $t \in [1, 2]$

  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 - (3 - t)^2 \end{cases}$ $t \in [1, 2]$

  Escriban ecuaciones paramétricas para las siguientes curvas:
  i) la porción de parábola $y = 2x^2 - 1$ desde $(1, 1)$ hasta $(3, 17)$.
  ii) la porción de parábola $y = 2x^2 - 1$ desde $(3, 17)$ hasta $(1, 1)$.

- $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ C es una curva de $\mathbb{R}^3$ (es la intersección de una superficie cilíndrica con un plano).

$$\begin{cases} x = cost \\ y = sent \\ z = 2 - sent \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{es una descripción paramétrica de } C.$$

Grafiquen la curva C e indiquen su orientación de acuerdo a la parametrización dada.

- Sea $C : \begin{cases} x^2 + 4y^2 + z^2 = 16 \\ z = 2y \end{cases}$
  Identifiquen las superficies cuya intersección define a la curva C en este caso.
  Reemplazando z por $2y$ en la primera ecuación resulta: $x^2 + 8y^2 = 16$, de manera que el sistema $\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 16 \\ z = 2y \end{cases}$ es equivalente al primero (define la misma curva C) y de allí se obtiene la siguiente parametrización:
  $$C : \begin{cases} x = 4\, cost \\ y = \sqrt{2}\, sent \\ z = 2\sqrt{2}\, sent \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$
  Escriban ecuaciones paramétricas para las siguientes curvas. Indiquen en un gráfico la orientación considerada en la curva:

  i) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ ii) $C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$ iii) $C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases}$

  iv) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ v) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$ vi) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

  vii) $C : \begin{cases} 5x^2 + y^2 + z^2 = 125 \\ y = 2z \end{cases}$ viii) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$

Representación vectorial paramétrica de curvas

Una función vectorial $\vec{r}$ es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuya imagen es un conjunto de vectores.

Para cada t en el dominio de $\vec{r}$ es:
$\vec{r}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j}$ (si la imagen de $\vec{r}$ es un conjunto de vectores del plano) o $\vec{r}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$ (si la imagen de $\vec{r}$ es un conjunto de vectores del espacio)

$X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ son las *componentes* de $\vec{r}$ (son funciones reales a valores reales).

Para simplificar la notación, escribiremos a veces:

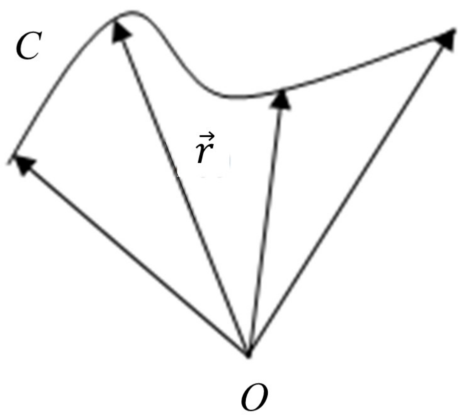
$$\vec{r}(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle \quad \text{o} \quad \vec{r}(t) = \langle X(t), Y(t), Z(t) \rangle$$

Una curva (del plano o del espacio) puede describirse con una función vectorial:

o, si C es una curva del espacio:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle X(t), Y(t), Z(t) \rangle \quad t \in I$$

El extremo de cada vector $\vec{r}(t)$ corresponde a un punto de la curva.



Ejemplos:

- **Parametrización de un segmento desde el punto A al punto B.**

  Sean A y B dos puntos del plano o del espacio. El segmento que los une se puede parametrizar de la siguiente manera:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = A + (B - A)t \ , \ t \in [0, 1]$$

Por ejemplo, si $A = (1, -1, 2)$ y $B = (1, 0, 3)$, entonces el segmento de A a B se parametriza por:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = (1, -1, 2) + ((1, 0, 3) - (1, -1, 2))t \ , \ t \in [0, 1]$$

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = (1, -1, 2) + (0, 1, 1)t \ , \ t \in [0, 1]$$

Resultando:

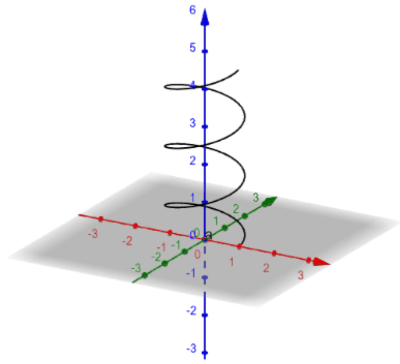
$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = (1, -1 + t, 2 + t) \ , \ t \in [0, 1]$$

- Hemos visto que $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ puede describirse por medio de las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = cost \\ y = sent \\ z = 2 - sent \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$
  $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle cos\, t, \ sen\, t \ , \ 2 - sen\, t\rangle \ ; \ t \in [0, 2\pi]$ es una descripción vectorial paramétrica de C.

- Siendo a y b números reales diferentes de cero, la ecuación vectorial

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle a\ cos\, t \ , \ a\ sen\, t \ , \ b\, t\rangle \ , \ t \in \mathbb{R}$$

corresponde a una *hélice circular* (resorte). $X(t) = a\ cos\, t$ e $Y(t) = a\ sen\, t$, de modo que la curva se halla sobre un cilindro circular de radio a (C es una hélice circular de *radio* a). Además, para todo t, es: $X(t + 2\pi) = X(t)$; $Y(t + 2\pi) = Y(t)$; $Z(t + 2\pi) = Z(t) + b\, 2\pi$ o sea que, a $\Delta t = 2\pi$, corresponde $\Delta X = \Delta Y = 0$ y $\Delta Z = 2\pi\ b$ (C es una hélice circular de *paso* $|b|\, 2\pi$)

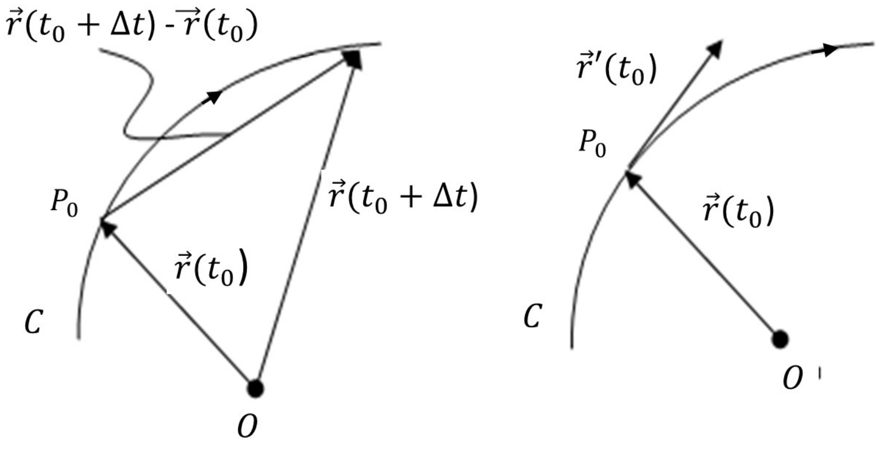


Vector tangente

Si $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle X(t), Y(t), Z(t)\rangle$ *con* $t \in I$, y $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ son derivables en $t_0 \in I$, entonces existe $\vec{r}\,'(t_0) = \langle X'(t_0), Y'(t_0), Z'(t_0)\rangle$ que, si es diferente del vector nulo, define la dirección tangente a la curva C en el extremo de $\vec{r}(t_0)$.

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$\vec{r}\,'(t_0)$ apunta en el sentido en el que se recorre la curva para valores crecientes del parámetro.



Si $\vec{r}\,'(t_0)$ existe y $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, se define como **vector tangente** a la curva

$C : \vec{r} = \vec{r}(t)$ en el punto correspondiente a t_0, al vector unitario

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$$

Ejemplo:

Para $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle 4\,cos\,t,\ 4\,sen\,t,\ 3\,t\rangle\,,\quad t \in \mathbb{R}$ (hélice circular de radio 4 y paso 6π),

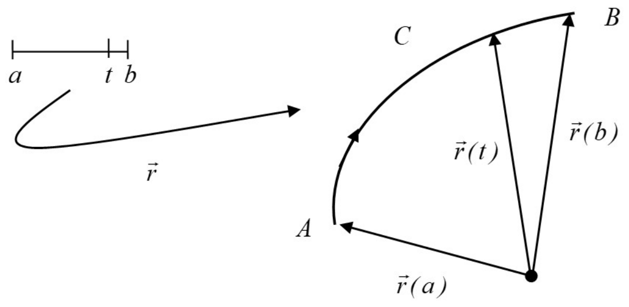
$$\vec{r}\,'(t_0) = \langle -4\ sen\,t_0,\ 4\ cos\,t_0,\ 3\rangle$$

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|} = \left\langle \frac{-4\ sen\ t_0}{5},\ \frac{4\ cos\ t_0}{5},\ \frac{3}{5}\right\rangle$$

En particular, por ejemplo, $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\right\rangle$ tiene la dirección tangente a la curva en el punto correspondiente a $t_0 = \frac{\pi}{4}$ que es el punto $P_0 = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4})$ y para ese punto es $\vec{T} = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{-2\sqrt{2}}{5},\ \frac{2\sqrt{2}}{5},\ \frac{3}{5}\right\rangle$.

6.3.1. Longitud de un arco de curva

Sea $C : \vec{r} = \vec{r}(t)\ ,\ con\ t \in [a, b]$



Nos proponemos calcular la longitud de C.

Supondremos que C es *suave* entendiendo por ello que $\vec{r}\,'(t)$ es continua y que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$. Geométricamente esto significa que el vector tangente existe en cada punto y que varía con continuidad sobre la curva.
Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\dfrac{b-a}{n}$ mediante $n+1$ puntos $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$.
Uniendo con líneas rectas los sucesivos pares de puntos $P_i = (X(t_i), Y(t_i), Z(t_i))$ y $P_{i+1} = (X(t_{i+1}), Y(t_{i+1}), Z(t_{i+1}))$ obtenemos una aproximación poligonal de C. La longitud de dicha poligonal es:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{[X(t_{i+1}) - X(t_i)]^2 + [Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2 + [Z(t_{i+1}) - Z(t_i)]^2}$$

Por el teorema del Valor Medio de Lagrange, aplicado a las funciones $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ en $[t_i, t_{i+1}]$, existen $c_i, d_i, e_i \in (t_i, t_{i+1})$ tales que

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = X'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$Y(t_{i+1}) - Y(t_i) = Y'(d_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$Z(t_{i+1}) - Z(t_i) = Z'(e_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{[X'(c_i)]^2 + [Y'(d_i)]^2 + [Z'(e_i)]^2}\,(t_{i+1} - t_i)$$

y, considerando que la poligonal se aproxima a la curva cuando n tiende a infinito, se tiene:

$$\textit{longitud de } C = L_A^B = \lim_{n \to \infty} S_n$$

por lo que concluímos, teniendo presente que X , Y y Z son funciones continuas en $[a, b]$, que la longitud de C es:

$$L_A^B = \int_a^b \sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\,dt$$

Es decir,

$$\boxed{L_A^B = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt}$$

Ejemplo:
Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = a\ cos\ t\ \vec{i} + a\ sen\ t\ \vec{j} + b\ t\ \vec{k}\ con\ t \in [0, 2\pi]$

es una espira de hélice circular de radio a y paso $|b|\, 2\pi$. Su punto inicial es $A = (a, 0, 0)$ y su punto final es $B = (a, 0, b\, 2\pi)$.

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -a\; sen\, t,\; a\; cos\, t,\; b \rangle$$
$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Entonces, la longitud de C es:

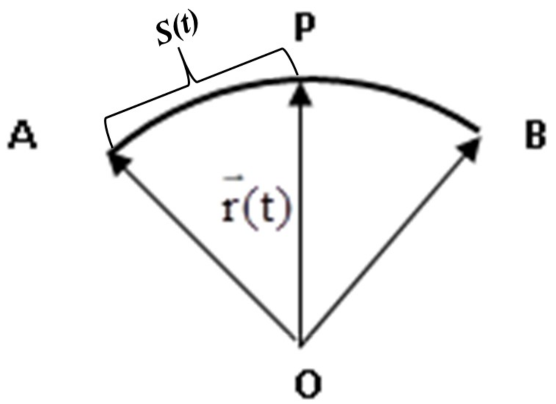
$$L_A^B = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\; dt = \sqrt{a^2 + b^2}\; 2\pi$$

Función longitud de arco

Sea $C : \vec{r} = \vec{r}(t)$, *con* $t \in [a, b]$, curva suave, con punto inicial A y punto final B. Para cada $t \in [a, b]$,

$$s = S(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(u)|\, du$$

es la longitud del arco de curva entre $A = (X(a), Y(a), Z(a))$ y $P = (X(t), Y(t), Z(t))$. S, así definida, se llama *función longitud de arco* y s es el *parámetro longitud de arco*.



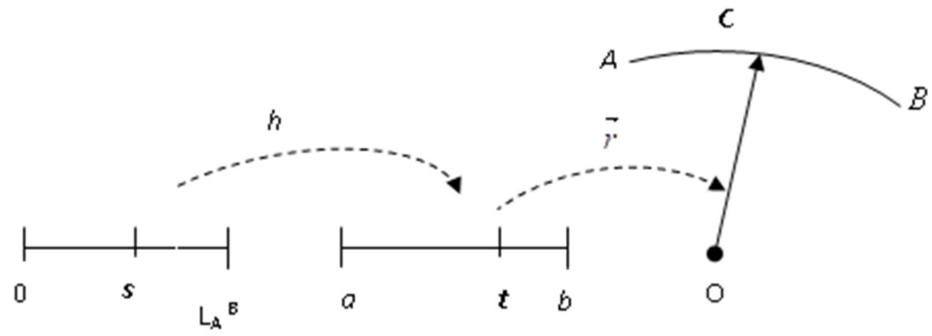
¿Qué podemos afirmar acerca de la función S?

- $S(a) = 0$ y $S(b) = L_A^B$

- $S'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0 \ \ \forall t \in (a, b)$
- S es estrictamente creciente , $Im(S) = [0, L_A^B]$

Entonces:

1. $S : [a, b] \to [0, L_A^B]$; $s = S(t)$ admite función inversa.
2. $h : [0, L_A^B] \to [a, b]$; $t = h(s)$ es la función inversa de S.
3. Componiendo S con h resulta: $(h \circ S)(t) = h[S(t)] = t$
   $\therefore \ h'[S(t)]S'(t) = 1 \ \to h'[S(t)] = h'(s) = \dfrac{1}{S'(t)} = \dfrac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}$.
4. $C : \vec{r} = \vec{r}(h(s)) = \vec{r}^{\,*}(s)$ con $s \in [0, L_A^B]$ es la descripción de la curva C en términos del parámetro longitud de arco. Nos referiremos a esta descripción como *representación natural* o *parametrización natural* .



Ejemplo:

Dada $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = a\ cos\, t\ \vec{i} + a\ sen\, t\ \vec{j} \quad con \ \ t \in [0, 2\pi]$, obtendremos su representación natural.

$$\vec{r}\,'(t) = -a\ sen\, t\ \vec{i} + a\ cos\, t\ \vec{j}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = a$$

$$s = S(t) = \int_0^t a\ du = at \quad ; \quad S(2\pi) = \int_0^{2\pi} a\ du = 2\pi a$$

$$t = \frac{s}{a}$$

$$C : \vec{r} = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\ cos\ \left(\frac{s}{a}\right)\ \vec{i} + a\ sen\ \left(\frac{s}{a}\right)\ \vec{j} \quad con\ \ s \in [0, 2\pi a]$$

6.3.2. Ejercicios

1. Calculen la longitud de las siguientes curvas:
   $C_1 : \vec{r} = \vec{r}(t) = \dfrac{t^3}{3}\ \vec{i} + t^2\vec{j} + 2t\vec{k}\ \ con\ t \in [0, 4]$.
   $C_2 : \vec{r} = \vec{r}(t) = e^t cost\ \vec{i} + e^t sent\vec{j} + e^t\vec{k}$ desde $A = (1, 0, 1)$ hasta $B = (-e^{\pi}, 0, e^{\pi})$.
   $C_3 : \vec{r} = \vec{r}(t) = 3cosh(2t)\ \vec{i} + 3senh(2t)\vec{j} + 6t\vec{k}\ \ con\ t \in [0, 1]$.

2. Obtengan la función longitud de arco y la representación natural de la curva:
   i) una espira de hélice circular de radio a y paso $|b|\,2\pi$.
   ii) $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = e^t cost\ \vec{i} + e^t sent\vec{j}\ \ ,\ t \in [0, 1]$.

6.4. Campos vectoriales

En física y matemática tenemos variados ejemplos que nos muestran la necesidad del empleo de vectores, para describir ciertos comportamientos y/o resultados. Acabamos de ver, que la dirección de una curva, queda en cada punto definida por el vector tangente. La variación del mismo, nos permite estudiar su forma. Recordemos también que - bajo ciertas condiciones - podemos conocer en que dirección se produce la mayor rapidez de cambio de una función de dos ó tres variables en un punto dado. Tal dirección es la del gradiente en ese punto particular y el módulo del mismo, mide la magnitud de ese cambio. En cada punto en que el gradiente esté definido, tenemos la posibilidad de conocer el comportamiento de tal función. Sabemos también que sobre todo cuerpo de masa m actúa una fuerza: la fuerza de gravedad, que se representa por medio de un vector de dirección vertical hacia abajo. También la velocidad de una partícula móvil, requiere de un vector para su descripción. Podríamos mencionar la velocidad de una partícula de un fluido en movimiento - líquido o gas - . Esta recurrencia al empleo de vectores - variables en cada punto - permite definir una *función* que a cada punto (del plano o del espacio) le hace corresponder un único vector. Estas funciones se definen como:

Campo vectorial

Un *campo vectorial* en es una función a valores vectoriales que asigna a cada punto $P \in D$ un único *vector* $\vec{F}$(P).
Un *campo vectorial* en $\mathbb{R}^2$ es una función definida sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

Las componentes del campo vectorial $\vec{F}$ son P y Q, funciones a valores reales definidas sobre D. Un *campo vectorial* en $\mathbb{R}^3$ es una función definida sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Las componentes del campo vectorial $\vec{F}$ son P, Q y R, funciones a valores reales definidas sobre D.

Para simplificar la notación, a menudo escribiremos:

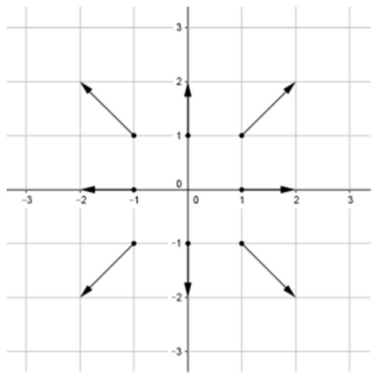
$$\vec{F} = \langle P, Q \rangle \quad o \quad \vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$$

Salvo indicación explícita, entenderemos que el dominio de un campo vectorial $\vec{F}$ es el mayor dominio posible, esto es, el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) en el que están definidas las componentes de $\vec{F}$.

Representación gráfica de campos vectoriales

La visualización que podemos hacer de un campo vectorial $\vec{F}$ consiste en dibujar, aplicados en unos cuantos puntos (x, y), el correspondiente vector $\vec{F}(x, y)$. Cuantos más vectores dibujemos mejor interpretación tendremos del campo vectorial.

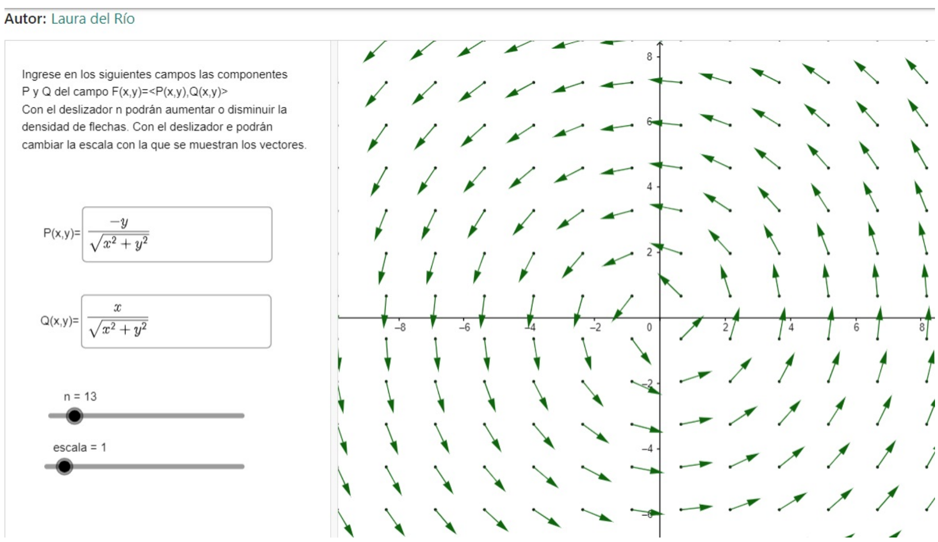
En la siguiente imagen están representados algunos vectores del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$



Podemos utilizar la graficadora de campos vectoriales del Libro de Geogebra **https://www.geogebra.org/m/GwRc5mQP** para tener una representación. Por ejemplo en la imagen siguiente usando GeoGebra se observan algunos vectores del campo vectorial

$$\vec{F} = \left\langle \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle$$

Su dominio es $\mathbb{R}^2 - \{(x,y)/x = y = 0\}$. Notar además, que el campo es unitario. Todos los vectores del campo son siempre de longitud 1.



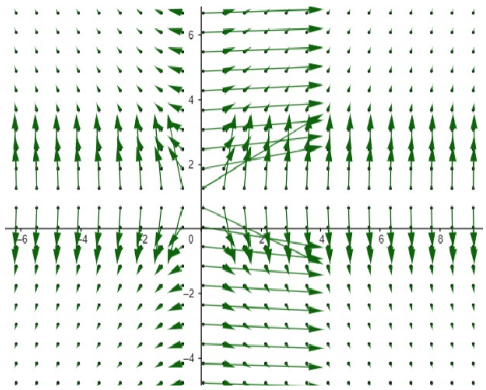
Ejemplos:

1) Sea el campo vectorial $\vec{F} = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{2}{y-1} \right\rangle$. La primera componente del está definida en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si $x \neq 0$. La segunda componente, está

definida en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si $y \neq 1$.

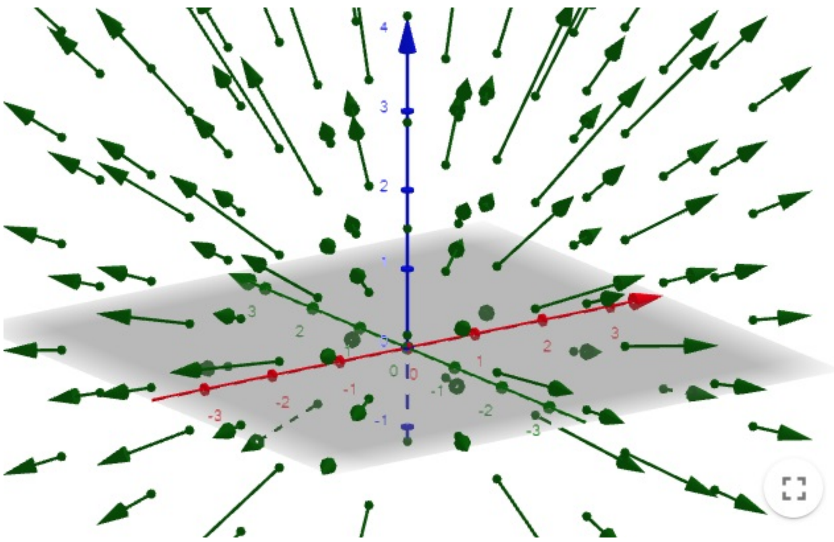
$$Dom(\vec{F}) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \wedge y \neq 1\Big\}$$

Su gráfica es:



2) Sea el campo vectorial $\vec{F} = \left\langle \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{z}{x^2 + y^2} \right\rangle$. Las componentes están definidas en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $x^2 + y^2 \neq 0$.

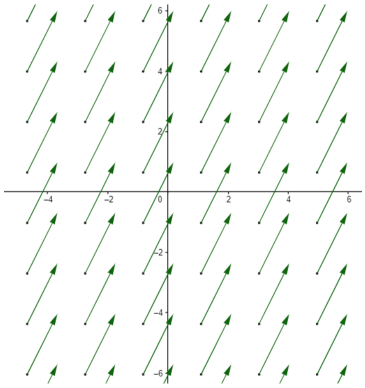
$$Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z)/x = y = 0\}$$



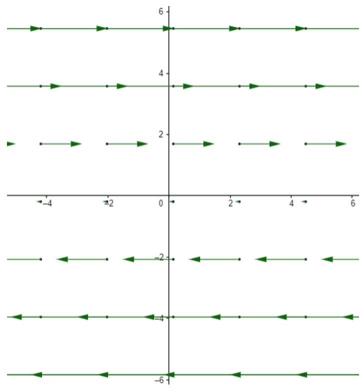
Algunos campos particulares

Campo vectorial constante o uniforme Son campos vectoriales cuyas componentes son constantes en todo punto de su dominio, su módulo es contante.

Ejemplo de ello es el campo: $\vec{F} = \langle 2, 1 \rangle$. Sus componentes están definidas en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y son continuas. Su dominio es $Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^2$



Campo vectorial paralelo Son campos vectoriales cuyos vectores tienen todos la misma dirección. Ejemplo de ello es el campo vectorial $\vec{F} = \langle y, 0 \rangle$. Los vectores del campo tiene la dirección del versor $\vec{i}$. Sus componentes están definidas en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y son continuas. Su dominio es $Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^2$.



Campo vectorial radial Cuando las componentes del campo vectorial son tales que todos los vectores apuntan directamente hacia o directamente lejos del origen, se llaman **campos radiales**. En estos casos se dice que existe una **simetría esférica** del campo, y **la magnitud del campo depende sólo de su distancia al origen.** Es decir que si llamamos

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

y

$$\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

entonces el campo puede ser expresado como

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

y su módulo es

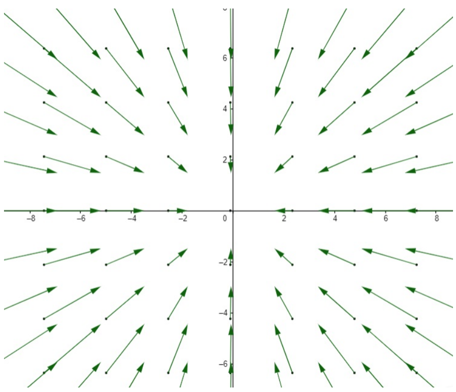
$$\left|\vec{F}\right| = \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{F} = f(r)$ es la magnitud del campo.

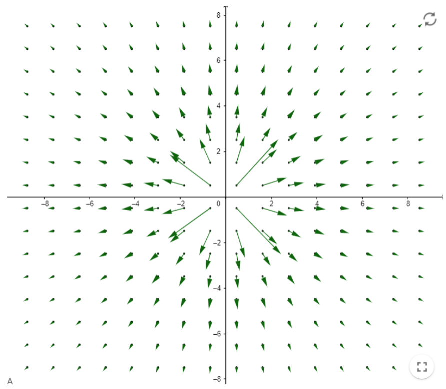
En un campo radial, el vector ubicado en el punto *(x, y)* es perpendicular al círculo centrado en el origen que contiene el punto *(x, y)*, y todos los demás vectores en este círculo tienen la misma magnitud. Análogamente para campos en 3 dimensiones. Estos campos son muy utilizados en física para modelar *campos eléctricos y gravitatorios.*

Ejemplo de esto es:

- El campo vectorial $\vec{F} = \langle -x, -y\rangle$ es **radial**. Las componentes están definidas para todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y su dominio es $Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^2$. El módulo de este campo es: $|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathbf{r}$. El campo puede escribirse como $\vec{F} = -\vec{r}$.



- El campo vectorial $\vec{F} = \left\langle \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right\rangle$ es **radial**. Las componentes del campo vectorial están definidas en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si $x^2 + y^2 \neq 0$. $Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. El módulo de este campo es: $|\vec{F}| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{1}{\mathbf{r}}$ y el campo puede escribirse como $\vec{F} = \dfrac{1}{\mathbf{r}^2}\ \vec{r}$. Observar que estos campos vectoriales sobre los puntos de un círculo toman un mismo valor que sólo depende del radio.



- Sea el campo vectorial $\vec{F} = \left\langle \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \right\rangle$. Las componentes están definidas en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

$$Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z)/x = y = z = 0\}$$

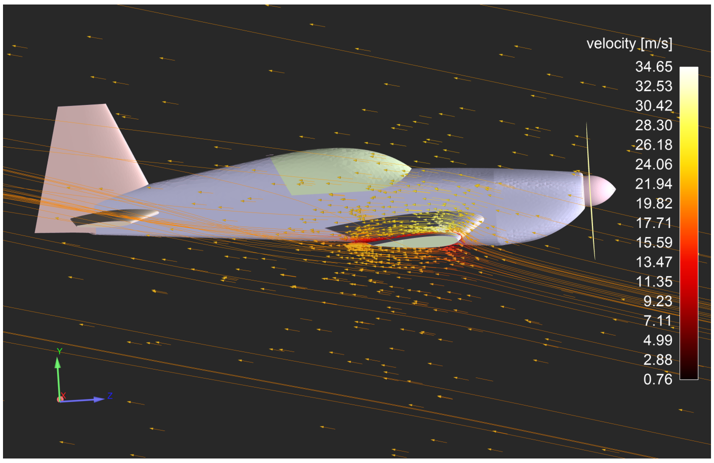
Es un campo radial, se puede escribir como $\vec{F} = \dfrac{1}{\mathbf{r}^2}\,\vec{r}$.

Observaciones

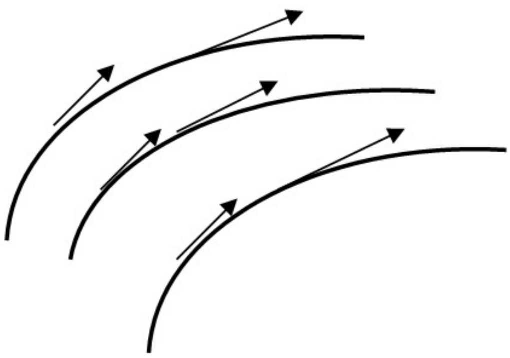
- Los campos vectoriales son importantes herramientas matemáticas para modelar en ingeniería diversos fenómenos. Se utilizan en física, para representar por ejemplo la velocidad y la dirección de un fluido en el espacio, o la intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética. Ejemplos de campos vectoriales son:
  - Campo de velocidades de un fluido.
  - Campos eléctricos. Modelan el espacio o una región del espacio que se modifica por la presencia de cargas eléctricas.
  - Campos magnéticos. Modelan el campo de fuerza creado como consecuencia del movimiento de las corrientes eléctricas y de los materiales magnéticos.
  - Campos electromagnéticos.
  - Campos gravitatorios.
- Los campos vectoriales, que describen ciertos fenómenos físicos pueden depender, además de la posición, también del tiempo. Por ejemplo un campo de velocidades de un fluido en movimiento describe la velocidad de una partícula, en función de las coordenadas del punto por donde

pasa, pero si además esa velocidad se modifica de acuerdo con el instante en que eso ocurre, el vector resulta dependiente de t (tiempo). Los campos vectoriales independientes del tiempo son llamados **campos vectoriales estacionarios**. En este curso sólo trabajaremos con el caso de campos estacionarios.

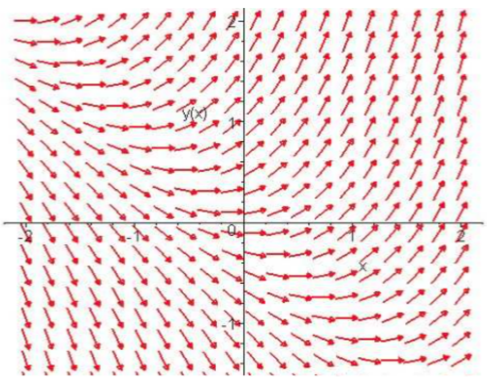
- Las líneas que en cada punto son tangentes al vector campo que pasa por el mismo punto, son llamadas **líneas de campo** y también en ciertos casos particulares, **líneas de flujo o líneas de corriente**. Cabe aclarar que el nombre de líneas de corriente es más adecuado para las trayectorias descriptas por las partículas de un fluido en movimiento, donde hay dependencia del tiempo (campo no estacionario). En la figura siguiente se observan las *líneas de corriente y campo de velocidad del aire alrededor de un ala* (material brindado por la Cátedra de Fluidos-Ing. Aeroespacial).

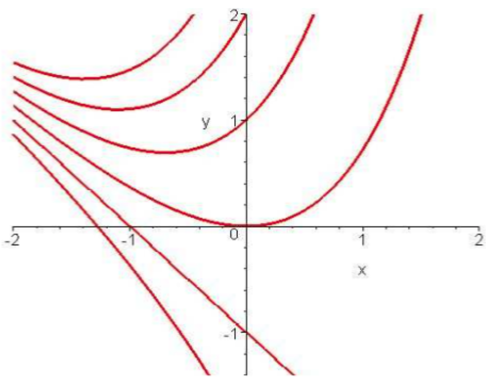


Para campos estacionarios, es común decir líneas de campo a esas trayectorias, pero en tal caso las líneas coinciden. Es decir que si el campo vectorial es $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, una linea de corriente es una curva $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ tal que verifica $\vec{r}\,'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. Resolver este tipo de problemas requiere del conocimiento de sistemas de ecuaciones diferenciales.



Ejemplo: en la figura que sigue se observa el campo de direcciones tangente en cada punto a la familia de soluciones de la ecuación diferencial $y'(x) = x + y$. Como ejercicio puedes resolver la ecuación diferencial para hallar la familia de curvas que se encuentra graficada.





6.5. Campos conservativos. Función potencial

Recordemos:

- Si f es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, que admite derivadas parciales en $P_0 \in D$, el *gradiente de f en P_0* es:

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j}$$

- Si f es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^3$, que admite derivadas parciales en $P_0 \in D$, el *gradiente de f en P_0* es:

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k}$$

- Si las derivadas parciales de f son continuas, la *derivada direccional* de f en P_0 y en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$, es

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$$

- El campo $\vec{\nabla} f$ es normal a las curvas/superficies de nivel de f y, en cada punto $P_0 \in D$, $\vec{\nabla} f(P_0)$ indica la dirección de máximo crecimiento de f.

Definición de campo conservativo

Un campo vectorial $\vec{F}$ es un *campo conservativo* en D ($D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$) si es un *campo gradiente* en D, o sea, si existe un campo escalar f tal que $\vec{\nabla} f(P) = \vec{F}(P)$, $\forall P \in D$. Si esto sucede, decimos que f es una *función potencial* de $\vec{F}$ en D.

Ejemplos:

- Mostraremos que el campo vectorial $\vec{F} = \langle 2xy, x^2 + y^2, 2z \rangle$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$ hallando una función potencial de $\vec{F}$, o sea, hallando $f(x, y, z)$ tal que, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(i)\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ $\quad (ii)\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$ $\quad (iii)\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z$

  Por (i), debe ser: $f(x, y, z) = \displaystyle\int 2xy \, ; dx = x^2 y + g(y, z)$ (noten que se ha integrado con respecto a x y la constante de integración puede depender de y y de z).
  Siendo $f(x, y, z) = x^2 y + g(y, z)$, resulta: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g}{\partial y}$
  Por (ii), concluimos que: $x^2 + \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2 + y^2$
  Por lo tanto: $\dfrac{\partial g}{\partial y} = y^2$ y de allí $g(y, z) = \dfrac{y^3}{3} + h(z)$.

  Entonces, $f(x, y, z) = x^2 y + \dfrac{y^3}{3} + h(z)$ y resta hallar $h(z)$.
  Contando con la expresión anterior de f, se tiene que: $\dfrac{\partial f}{\partial z} = h'(z)$.
  Entonces, por (iii), debe ser: $h'(z) = 2z$ y de allí: $h(z) = z^2 + C$.
  Entonces, $f(x, y, z) = x^2 y + \dfrac{y^3}{3} + z^2 + C$ es (cualquiera sea $C \in \mathbb{R}$), una

función potencial de $\vec{F}$ en R^3 y el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo en R^3.

- Para determinar si $\vec{F}(x,y) = \langle xy, y^2 \rangle$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$ veremos si existe $f(x,y)$ tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$i)\ \frac{\partial f}{\partial x} = xy$$

$$ii)\ \frac{\partial f}{\partial y} = y^2$$

Para que se cumpla $i)$ debe ser:

$f(x,y) = \int xy\, dx = \frac{x^2}{2} y + g(y)$

Siendo $f(x,y) = \frac{x^2}{2} y + g(y)$ resulta $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + g'(y)$

Por $ii)$ concluimos que $\frac{x^2}{2} + g'(y) = y^2$, luego $g'(y) = y^2 - \frac{x^2}{2}$ lo que es absurdo pues g depende únicamente de la variable y. Entonces, la conclusión es que no existe una función potencial de $\vec{F}(x,y) = \langle xy, y^2 \rangle$ en $\mathbb{R}^2$ o sea que que dicho campo vectorial no es conservativo en $\mathbb{R}^2$

6.5.1. Ejercicios

1. Indiquen el dominio de los siguientes campos vectoriales, determinen si son conservativos en ese dominio y hagan una representación gráfica de los mismos.
   i) $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i}$ ii) $\vec{F}(x,y) = sec\ x\ \vec{j}$ iii) $\vec{F}(x,y,z) = -z\,\vec{k}$
   iv) $\vec{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$

2. Muestren que los siguientes campos vectoriales son conservativos en $\mathbb{R}^3$.
   i) $\vec{F}(x,y,z) = (2x-3y)\vec{i} - 3x\vec{j} + 2\,\vec{k}$
   ii) $\vec{F}(x,y,z) = yz\ cos(xyz)\ \vec{i} + xz\ cos(xyz)\ \vec{j} + xy\ cos(xyz)\ \vec{k}$

3. Supongamos el planeta Tierra, de masa M, ubicado en el origen de coordenadas y un objeto de masa m ubicado en el punto P de coordenadas (x,y,z). Si $\vec{F}(x,y,z)$ es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el objeto entonces

$$\left|\vec{F}(x,y,z)\right| = G\,\frac{M\,m}{|\vec{r}|^2}$$

donde G es la constante gravitacional y $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$.

Además, $\vec{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen, en la dirección del vector $-\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, o sea: $\quad \vec{F}(x, y, z) = G\,\dfrac{M\,m}{|\vec{r}|^2}\left(-\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) = -G\,M\,m\,\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

Siendo $c = G\;M\;m$, se tiene la siguiente expresión para el campo vectorial $\vec{F}$:

$$\vec{F}(x, y, z) = -c\frac{\langle x, y, z \rangle}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

Notar que este es un campo radial, y comprueben que $\vec{F}$ es un campo gradiente hallando su función potencial.

6.6. La divergencia y el rotor

Sabemos que la variación de una función se estudia por medio de las derivadas (parciales y/o totales). El campo vectorial, es formalmente una función. ¿Cómo puede entonces estudiarse el cambio punto a punto de su dirección y magnitud? Supongamos que las componentes de un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\;\vec{i} + Q(x, y, z)\;\vec{j} + R(x, y, z)\;\vec{k}$ admiten derivadas parciales con respecto a cada una de las variables. Estas derivadas son:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{array}$$

Una combinación entre ellas permite estudiar el cambio de dirección y el cambio de módulo. Las derivadas que se encuentran en la diagonal van a contribuir al cálculo de la definición de la *magnitud escalar divergencia*, y las restantes derivadas contribuyen a la definición de la *magnitud vectorial rotor*.

Rotor y divergencia de un campo vectorial

Dado $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$,
en los puntos de coordenadas (x,y,z) en los que existan las derivadas parciales de las componentes de $\vec{F}$, se definen la *divergencia de* $\vec{F}$ y el *rotor de* $\vec{F}$ de la siguiente manera:

$$div\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$rot\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\,\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\,\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\vec{k}$$

Observación importante: Para un campo vectorial en el plano

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$$

es posible calcular el rotor extendiéndolo con componente 0 en $\vec{k}$. Resultando ser el campo rotor:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0\ ,\ 0\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle =$$

$$= (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$$

Notar que para un campo vectorial en el plano, su rotor es un campo vectorial con componente sólo en la dirección ortogonal a ese plano.

Notar que la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar y que el rotor de un campo es un campo vectorial.

Ejemplo:

1) Para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j} + yz^2\,\vec{k}$ es

$$P = x^2 \quad ; \quad Q = -2xy \quad ; \quad R = yz^2$$

Luego,

$$div\vec{F}(x,y,z) = 2x - 2x + 2yz = 2yz$$

$$rot\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2 - 0\right)\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + (-2y - 0)\,\vec{k} = z^2\,\vec{i} - 2y\,\vec{k}$$

2) Para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = y^2\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ es

$$P = y^2 \quad ; \quad Q = xz \quad ; \quad R = yz$$

entonces

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xz & yz \end{vmatrix} = \langle z - x, 0, z - 2y \rangle$$

Operador nabla
El vector simbólico

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

se llama *operador nabla*. Su uso permite expresar de manera sintética el gradiente y el Laplaciano de un campo escalar f, la divergencia y el rotor de un campo vectorial $\vec{F}$:

$$\vec{\nabla} f = grad\ (f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle f$$

$$\vec{\nabla}^2 f = Laplaciano(f) = \Delta f = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\ \cdot\ \vec{F} = div\ \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle$$

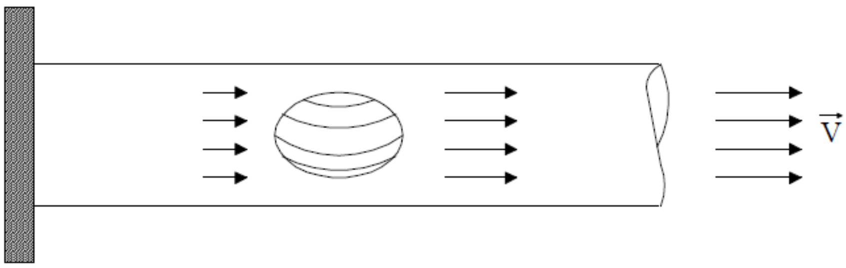
$$\vec{\nabla}\ \times\ \vec{F} = rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

¿Qué interpretación podemos darle a la divergencia?

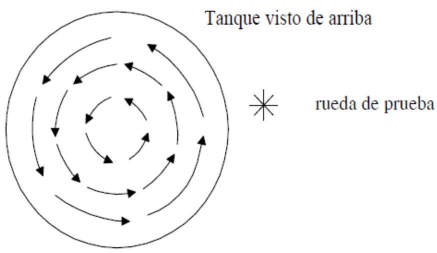
Consideremos un tubo a través del cual fluye agua. Podemos imaginar dentro del tubo una superficie cerrada (indicada por las líneas de punto). El agua pasa a través de esta superficie. El agua entra por un lado y sale por el otro. El líquido puede circular en cualquier forma irregular; la cantidad que entra debe ser igual a la que sale. Se probará más adelante que esto equivale a decir que el agua que es incompresible, que circula de tal manera que si representamos su velocidad por el campo $\vec{V}$ la divergencia de $\vec{V}$ debe ser idénticamente nula. Este es el origen de la denominación divergencia: el agua no puede divergir de un punto, pues dejaría un vacío, tampoco puede converger a un punto, pues es incompresible.

El movimiento del aire es diferente. Supongamos un tubo de aire comprimido con cierre en un extremo. Un cierre similar acaba de ser removido del otro extremo y el aire sale hacia fuera. Consideremos la superficie cerrada, señalada con línea de puntos. Como el aire se expande, es más el aire que sale por un lado de la superficie que el que entra por el otro. En consecuencia, hay una divergencia de aire. Hay divergencia distinta de cero en todos los puntos en que el aire se expande. Si la velocidad del aire está representada por el campo vectorial $\vec{V}$, la divergencia del vector $\vec{V}$, es distinta de cero.

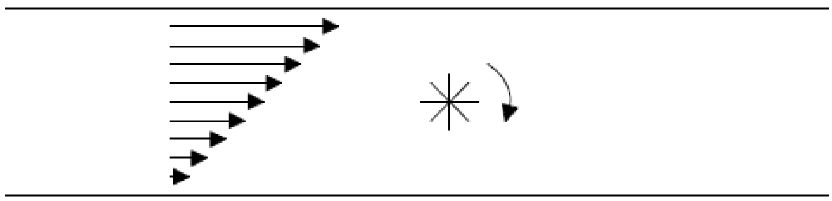


¿Qué interpretación podemos darle al rotor?

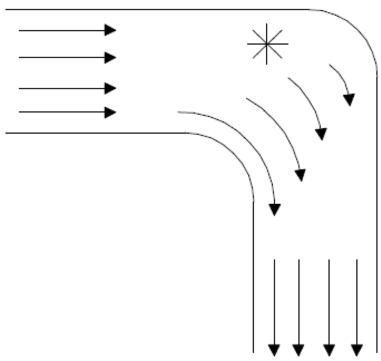
Imagine un gran tanque circular, conteniendo agua, la cual ha sido movida con una pala. Los vectores representan la velocidad $\vec{V}$.



Al lado del tanque se muestra una pequeña rueda con paletas. Si esta rueda montada sobre un mecanismo libre de fricción, se sumerge en el centro del tanque, girará en sentido contrario a las agujas del reloj. En cualquier punto que se coloque la ruedita girará, pues aunque no esté en el centro, el agua corre mas rápidamente por un lado de la ruedita que por el otro. El movimiento de la rueda está indicando que el campo de velocidades tiene un rotor no nulo. El nombre rotor está vinculado con el movimiento en líneas curvas. Sin embargo un movimiento rectilíneo de un fluido puede tener también un rotor no nulo. Supongamos que el agua fluye en un canal, en tal forma que su velocidad sea mayor, cerca de la superficie que en el fondo. Toda partícula se mueve sobre una recta.

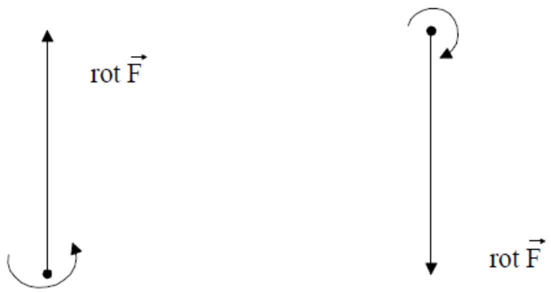


Recurriendo a la ruedita “exploradora” podemos observar que girará en sentido de las agujas del reloj, pues la corriente es mas rápida en las capas superiores. Esto significa que el rotor no es nulo. También puede darse movimiento curvilíneo con rotor nulo. Se puede concebir que la curvatura y la variación de velocidad estén relacionadas de tal manera que la ruedita quede sin girar. Es posible entonces, la existencia de movimientos de fluidos curvos, cuyos campos de velocidades sean de rotor nulo.



Podemos completar esta presentación, enfatizando que la divergencia de un campo vectorial es una función escalar. Hay divergencia de un punto o hacia un punto (positiva o negativa), pero no hay asociada a este concepto idea alguna de dirección. El rotor de un campo vectorial es un vector. Si imaginamos el rotor como un torbellino, es evidente que este gira alrededor de un eje que puede ser vertical, horizontal, o con cualquier inclinación. La dirección de tal eje es por definición la dirección del vector que representa al rotor.

Refiriéndonos a la ruedita exploradora, diremos que cuando está en la posición en que Supongamos el canal de la figura donde en la parte recta el agua circula con velocidad uniforme. Es evidente que allí la rueda exploradora no girará. Es posible también que en la parte curva el agua circule con rotor nulo. ¿Cómo es esto? Bueno, para ello es necesario que el agua circule con mayor velocidad en la margen interna del canal en la proporción justa. Por causa de la curvatura de las líneas de corriente, más de la mitad de las paletas de la ruedita exploradora son dirigidas en el sentido de las agujas del reloj. La velocidad, sin embargo, es mayor según supusimos en la orilla interior y aunque sean empujadas menos, en el sentido opuesto, reciben un impulso mayor. se mueve más rápidamente, su eje está en la dirección del rotor. Las componentes del rotor se encuentran colocando el eje de la ruedita paralelo a cada uno de los ejes coordenados. El sentido del rotor está determinado por el sentido de rotación de la ruedita. Se determina de acuerdo con la regla de la mano derecha - o tornillo derecho -.



El concepto de rotor y divergencia se continuará trabajando más adelante, cunado estudiemos el Teorema de Stokes y el Teorema de Gauss.

6.6.1. Ejercicios

1. Calculen la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales:
   i) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$
   ii) $\vec{F}(x,y,z) = e^x cos\ y\,\vec{i} + e^y cos\ x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

2. Grafiquen los siguientes campos vectoriales y calculen la divergencia y el rotor de los mismos.
   i) $\vec{F}(x,y) = \ \vec{i} + 2\,\vec{j}$
   ii) $\vec{F}(x,y) = \ (y+10)\vec{i}$
   iii) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$

3. Sea f un campo escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial. Indiquen si los siguientes son campos escalares o vectoriales:
i) $grad(f)$ ii) $div(grad(f))$ iii) $rot(grad(f))$ iv) $div(rot(grad(f))$ v) $rot(rot(\vec{F}))$

4. a) Suponiendo que existen las derivadas parciales del campo escalar f y de las componentes de los campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$, muestren que:
i)$div(\vec{F}+\vec{G}) = div\vec{F} + div\vec{G}$ y $div(\vec{F}-\vec{G}) = div\vec{F} - div\vec{G}$
ii)$rot(\vec{F}+\vec{G}) = rot\vec{F} + rot\vec{G}$ y $rot(\vec{F}-\vec{G}) = rot\vec{F} - rot\vec{G}$
iii)$div(f\vec{F}) = f div\vec{F} + grad(f)\cdot\vec{F}$
iv)$rot(f\vec{F}) = f rot\vec{F} + grad(f)\times\vec{F}$

b) Suponiendo que existen y son continuas las derivadas parciales de segundo orden del campo escalar f y de las componentes de $\vec{F}$, muestren que:

$$i)\ div(rot\vec{F}) = 0$$

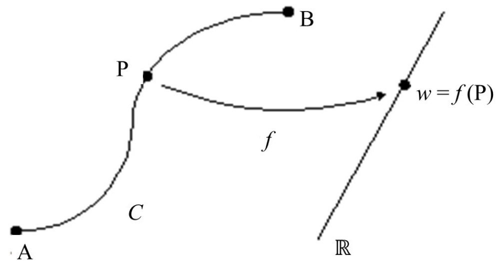
$$ii)\ rot(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$$

Observación: las dos últimas propiedades serán de una valiosa utilidad. En particular la última, nos asegura que un campo gradiente, tiene rotor nulo. Inversamente, más adelante probaremos que bajo ciertas hipótesis, si un campo vectorial tiene rotor nulo, es un campo gradiente. El reconocer que un campo es un campo conservativo es fundamental. Ya que, permitirá simplificar el análisis/cálculo de problemas físicos y matemáticos, aplicar principios de conservación de energía, y revelar información sobre la simetría y las propiedades del sistema, lo que facilitará la comprensión y resolución de problemas en diversas disciplinas científicas.

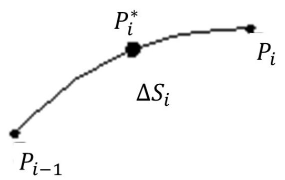
6.7. Integral de línea de una función escalar

El concepto de integral de línea es una generalización natural de la integral definida. El proceso que conduce a su formulación se genera de la misma forma. Una función de dos o tres variables, definida en una curva, reemplaza a la función de una variable definida en un intervalo.

Sea C un arco de curva suave que, con valores crecientes del parámetro, se recorre desde A hasta B y $w = f(P)$ una función a valores reales, definida y acotada sobre C.



Consideremos una partición $\mathcal{P}$ que, por medio de un número finito de puntos $A = P_0, P_1, ..., P_{i-1}, P_i, ..., P_n = B$, divide a C en n subarcos $\overset{\frown}{\mathrm{P_{i-1}P_i}}$ con longitudes ΔS_i, para $i = 1, ..., n$.
Sea $|\mathcal{P}| = \textit{máx}\,\{\Delta S_i / i = 1, ..., n\}$ la *norma* de esa partición y sea P_i^* un punto (cualquiera) perteneciente al subarco $\overset{\frown}{\mathrm{P_{i-1}P_i}}$.



Sea $J_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta S_i$. La integral de línea de f a lo largo de la curva C es el límite de J_n cuando $|\mathcal{P}|$ tiende a cero, siempre que ese límite exista y no dependa de las particiones consideradas ni de los puntos P_i^* elegidos, o sea:

$$\int_C f(P)ds = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta S_i$$

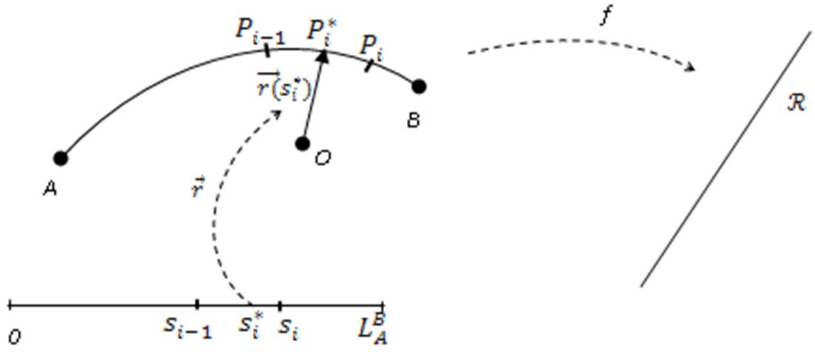
Cálculo de la integral de línea

Supongamos f continua sobre el arco de curva suave C.

a) En función del parámetro longitud de arco:
Supongamos que C está representada en función del parámetro longitud de

arco, esto es:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s) \rangle \,, \quad con \quad s \in [0, L_A^B]$$



Tomar $n+1$ puntos de división en la curva C equivale a tomar una partición en $[0, L_A^B]$:

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < ... < s_{i-1} < s_i < ... < s_n = L_A^B$$

que divide a ese intervalo en n subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ de longitud ΔS_i.
P_i^* es el extremo de $\vec{r}(s_i^*)$ para algún $s_i^* \in [s_{i-1}, s_i]$.

Entonces $J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}\,(s_i^*))\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} (f \circ \vec{r})\,(s_i^*)\,\Delta S_i$

$g = f \circ \vec{r}$ es continua en $[0, L_A^B]$ (¿por qué?) y se tiene entonces :

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} J_n = \int_0^{L_A^B} (f \circ \vec{r})\,(s)\,ds$$

luego,

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_0^{L_A^B} (f \circ \vec{r})\,(s)\,ds = \int_0^{L_A^B} f\,(\vec{r}\,(s))\,ds = \int_0^{L_A^B} f(x(s), y(s), z(s))ds$$

b) En función de un parámetro *t*:

Consideremos ahora la curva suave

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle\,, \quad con \quad t \in [a, b]$$

Como hemos visto, $C : \vec{r} = \vec{r}(h(s)) = \vec{r}^{\,*}(s)$ con $s \in [0, L_A^B]$ donde s es el parámetro longitud de arco y h es la función inversa de la función longitud de arco. Entonces,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_0^{L_A^B} f\left(\vec{r}\left(h\left(s\right)\right)\right) ds$$

y haciendo, en la última integral, el cambio de variable $t = h(s)$ resulta:

$$\boxed{\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f\left(\vec{r}\left(t\right)\right) \left|\vec{r}^{\,\prime}\left(t\right)\right| dt}$$

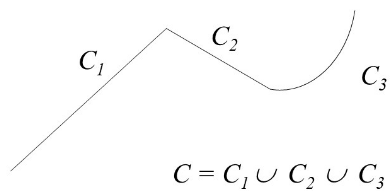
Propiedades de la integral de línea

- Si k es constante:
$$\int_C kf\ ds = k \int_C f\ ds$$

- Si f y g son integrables sobre C entonces:
$$\int_C (f + g)\ ds = \int_C f\ ds\ + \int_C g\ ds$$

- La integral de línea de un campo escalar es independiente de la parametrización y de la orientación de la curva. Puede anotarse que:
$$\int_C f\ ds\ = \int_{-C} f\ ds$$
siendo $-C$ la misma curva C recorrida en el sentido contrario.

- Si la curva C a lo largo de la cual se calcula la integral de línea de una función f es unión de un número finito de curvas suaves como se ve por ejemplo en la figura siguiente:



En ese caso, si f es integrable en cada cada una de las curvas suaves:

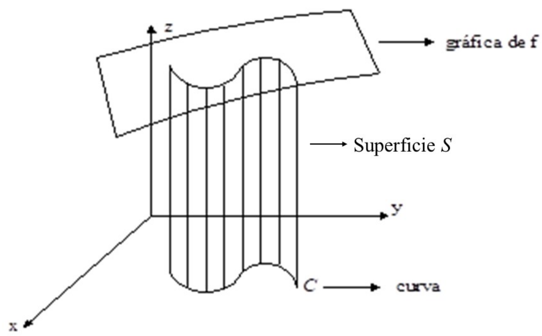
$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds\ +\ \int_{C_2} f\ ds\ +\ \int_{C_3} f\ ds$$

- Si la trayectoria de integración es una curva cerrada, se suele indicar:

$$\oint_C f\ ds$$

Interpretaciones de la integral de línea

- Si la función f es 1, la integral de línea calcula la longitud de C, es decir:
$$\int_C 1\ ds = Longitud(C)$$
.
- Supongamos que C representa un alambre y $f(x, y, z)$ es la función *densidad lineal de masa* entonces la *masa del alambre* se calcula con la integral de línea de f a lo largo de C:
$$\int_C f\ ds = \ Masa\ del\ alambre\ C$$
.
- Supongamos que C es una curva del plano y que $f(x, y)$ es una función continua, con $f(x, y) \geq 0$ sobre C. Siendo así, el área de la superficie cilíndrica que se levanta verticalmente sobre la curva C y que tiene en cada punto $(x, y, 0) \in C$ altura igual a $f(x, y)$, se calcula con la integral de línea de f a lo largo de C.



$$\int_C f \; ds = \; \acute{A}rea\ de\ la\ superficie\ S$$

Ejemplo: Calcularemos $\int_C xy^3 ds$, siendo C el segmento de recta $y = 2x$ de extremos $A = (-1, -2)$ y $B = (1, 2)$.

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle t, 2t \rangle \quad con\ t \in [-1, 1]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, 2 \rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$f(\vec{r}(t)) = t(2t)^3 = 8t^4$$

$$\int_C xy^3 ds = \int_{-1}^{1} 8t^4 \sqrt{5}\; dt = 8\sqrt{5}\ \left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

Nota: En el ejemplo hemos parametrizado el segmento C haciendo $C : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ $\quad con\ t \in [-1, 1]$ pero, a los fines de calcular la integral de línea de un campo escalar f a lo largo de C, podríamos haber usado cualquier otra parametrización de ese segmento, incluso aquellas que lo orienten de manera diferente.

6.7.1. Ejercicios

1. Calculen $\int_C \left(x^2+y^2\right) ds$ siendo:

   a) $C : y = 3x$, desde $A = (0,0)$ hasta $B = (2,6)$.

   b) $C : x^2 + y^2 = 1$, desde $A = (0,1)$ hasta $B = (1,0)$ en sentido antihorario.

   c) $C : x^2 + y^2 = 1$, desde $A = (0,1)$ hasta $B = (1,0)$ en sentido horario.

   d) C : trayectoria que coincide con el eje x desde el punto $(0,0)$ hasta el $(1,0)$ y es paralela al eje y desde el punto $(1,0)$ hasta el $(1,1)$.

   e) C : trayectoria que coincide con el eje y desde el punto $(0,0)$ hasta el $(0,1)$ y es paralela al eje x desde el punto $(0,1)$ hasta el $(1,1)$.

2. Calculen:

   a) $\int_C xe^y ds$ siendo C el segmento de recta desde $(-1,2)$ hasta $(1,1)$.

   b) $\int_C x\ ds$ siendo $C : y = x^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2,4)$.

   c) $$\int_C (2x+9z)\, ds \quad \text{siendo } C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad con\ 0 \leq t \leq 1$$

   d) $$\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right) ds \quad \text{siendo } C : \begin{cases} x = 4cost \\ y = 4sent \\ z = 3t \end{cases} \quad con\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

3. Calculen mediante una integral de línea:

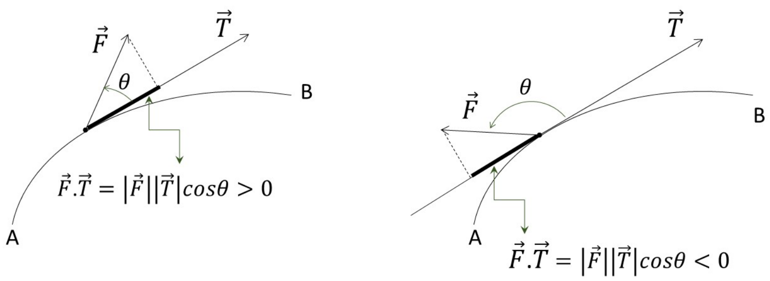
   a) el área de la superficie que se eleva verticalmente desde el segmento de recta de extremos $(-2,0,0)$ y $(2,0,0)$ hasta $z = 4 - x^2 - y^2$.

   b) el área de la superficie que se eleva verticalmente desde el arco de elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ ubicado en el primer cuadrante hasta $z = \dfrac{x\,y}{2}$.

6.8. Integral de línea de un campo vectorial

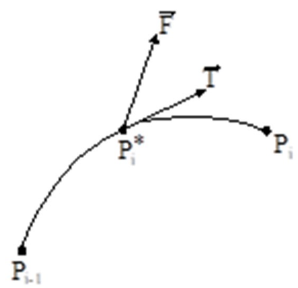
Sea C un arco de curva suave que, con valores crecientes del parámetro, se recorre desde A hasta B y $\vec{F}$ un campo vectorial definido sobre C, con componentes continuas. Llamaremos *integral de línea del campo vectorial* $\vec{F}$ *a lo largo de* C a la integral de la componente tangencial del campo $\vec{F}$ a lo largo de C, o sea, a la integral del campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$ a lo largo de C :

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$



Interpretación de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$ **:**

Si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas, dividido el arco C en n subarcos $\overset{\frown}{\mathrm{P_{i-1}P_i}}$ de longitud ΔS_i y siendo P_i^* un punto arbitrario en cada subarco, $\left(\vec{F} \cdot \vec{T}\right)(P_i^*) . \Delta S_i$ es una aproximación del trabajo que realiza $\vec{F}$ a lo largo del subarco $\overset{\frown}{\mathrm{P_{i-1}P_i}}$.



$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F} \cdot \vec{T}\right)(P_i^*) \, \Delta S_i$ es una aproximación del trabajo W que realiza $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria C desde A hasta B, siendo esa aproximación tanto mejor cuanto más pequeñas sea todas las longitudes ΔS_i.

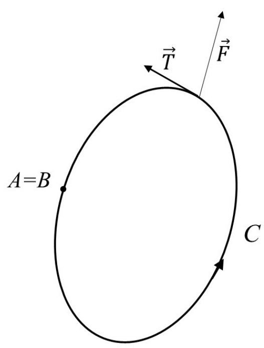
El **trabajo** W **que realiza** $\vec{F}$ **a lo largo de la trayectoria** C **desde** A **hasta** B es:

$$W = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}\cdot\vec{T}\right)(P_i^*)\,\Delta S_i$$

Entonces:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds$$

Notación: Si la curva C es cerrada (punto inicial igual al punto final, $A = B$) la integral la escribimos del siguiente modo y la llamaremos: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds =$ *Circulación de* $\vec{F}$ *a lo largo de* C



Cálculo de $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ **:**

Si $C : \vec{r} = \vec{r}(t) \quad con \quad t \in [a,b]$ entonces

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_a^b \left(\vec{F}\cdot\vec{T}\right)(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t))\cdot\vec{T}\,(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t))\cdot\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt$$

Entonces:

$$\boxed{W = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt}$$

Ejemplo: Sea $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + y^2z\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ un campo de fuerzas y $C : t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + (1-2t)\,\vec{k} \;\; con \;\; t \in [0,1]$

Calcularemos el trabajo realizado por $\vec{F}$ al desplazar una partícula desde $A \leftrightarrow \vec{r}(0)$ hasta $B \leftrightarrow \vec{r}(1)$ a lo largo de C

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left\langle 2t^3, t^4 - 2t^5, t - 2t^2 \right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, 2t, -2 \rangle$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = 2t^3 + 2t^5 - 4t^6 - 2t + 4t^2$$

$$W = \int_0^1 \left(2t^3 + 2t^5 - 4t^6 - 2t + 4t^2\right) dt = ... = \frac{25}{42}$$

Notaciones varias: para la integral de línea de $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$ a lo largo de C son:

Forma diferencial:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Otra forma normalmente utilizada para escribir una integral de línea de un campo vectorial es la siguiente. Consideremos que $\vec{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ de la forma $\vec{F}(x, y) = (P, Q)$ y C es una curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt \tag{6.1}$$

$$= \int_a^b (P, Q) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt \tag{6.2}$$

$$= \int_a^b \left(P\, \frac{dx}{dt} + Q\, \frac{dy}{dt}\right) dt \tag{6.3}$$

$$= \int_C P\; dx + Q\; dy \tag{6.4}$$

Esta notación puede extenderse a campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

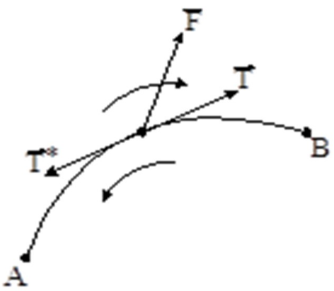
Otra notación es utilizando los cosenos directores del vector tangente a la curva:

$$\int_C (P\; cos\alpha + Q\; cos\beta + R\; cos\gamma)\, ds$$

Cualquiera sea la notación, el cálculo se efectúa como se ha explicado y ejemplificado anteriormente.

Observación importante: Si llamamos $-C$ al arco de curva que coincide con C pero tiene orientación contraria, los vectores tangentes a C y a $-C$ son opuestos por lo que el signo de $\vec{F} \cdot \vec{T}$ cambia, resultando entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = -\int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$



6.8.1. Ejercicios

1. Calculen el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de C:

   a) $\vec{F} = \langle 2x, 2y \rangle$ y C es el segmento de recta desde $A = (3, 1)$ hasta $B = (5, 4)$.

   b) $\vec{F} = \langle 2x, -2y \rangle$ y C es el segmento de recta desde $A = (4, 2)$ hasta $B = (0, 4)$.

   c) $\vec{F} = \langle y, x \rangle$ y C es la frontera del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ recorridos en ese orden.

   d) $\vec{F} = \langle z, y, 0 \rangle$ y C es el segmento de recta desde $A = (1, 0, 2)$ hasta $B = (2, 4, 2)$.

   e) $\vec{F} = \langle z, 0, 3x^2 \rangle$ y C es el cuarto de elipse $\vec{r} = \vec{r}(t) = \langle 2cost, 3sent, 1 \rangle$ desde $A = (2, 0, 1)$ hasta $B = (0, 3, 1)$.

   f) $\vec{F} = \langle x, -z, 2y \rangle$ y C es la trayectoria cerrada formada por los segmentos C_1 desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$; C_2 desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ y C_3 desde $(1, 1, 1)$ hasta $(0, 0, 0)$.

2. Calculen $\int_C y^2dx + x^2dy + xyzdz$ a lo largo de:

   a) el eje x, desde $(-1, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 0)$

   b) la parábola $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$ desde $(0, 0, 1)$ hasta $(1, 1, 1)$

   c) la parábola cúbica $\begin{cases} z = x^3 \\ y = 2 \end{cases}$ desde $(0, 2, 0)$ hasta $(1, 2, 1)$

3. Calculen $\int_C (x\ cos\alpha + y\ cos\beta + z\ cos\gamma)\, ds$ a lo largo de
   $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = 3cost\ \vec{i} + 3sent\ \vec{j} + 4t\ \vec{k}\ \ con\ \ t \in [0, 2\pi]$

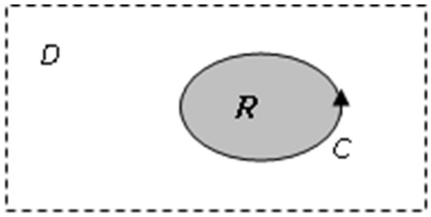
6.9. Teorema de Green

George Green (1793-1841) fue un matemático británico que llevó a cabo diversos trabajos sobre dinámica de los fluidos, sobre las fuerzas de atracción y, en particular, sobre la aplicación del análisis matemático al estudio del electromagnetismo.

Teorema de Green

Sea C una curva del plano, cerrada, simple, suave a trozos y con orientación antihoraria y sea $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$. Si las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en un dominio abierto D que contiene a C y a la región R limitada por C, entonces:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \ .$$



Nota: Una curva C es *cerrada* si el punto inicial y el final coinciden y es *simple* si no se corta a sí misma.

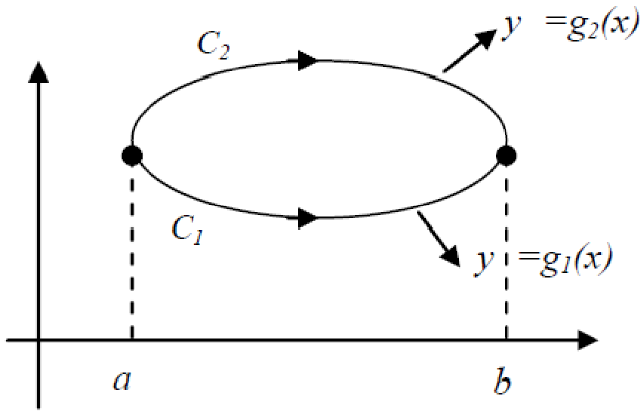
Demostración: Presentamos aquí una demostración para regiones del tipo I y II a la vez. En este caso se demuestra que:

$$\oint_C P dx = \iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

y

$$\oint_C Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA$$

con lo cual queda demostrado el teorema de Green. Para probar la primera igualdad suponemos R de tipo I de la forma:



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$. Calculando la integral doble de la primera igualdad tenemos:

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx =$$

$$= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

Ahora calculemos la integral de línea para la primera igualdad. El borde de R puede ser escrito como la unión de las curvas C_1 y C_2. Para C_1 utilicemos las siguientes ecuaciones paramétricas $x = x$ y $y = g_1(x)$ con $a \leq x \leq b$ Para C_2 utilicemos las siguientes ecuaciones paramétricas $x = x$ y $y = g_2(x)$ con $a \leq x \leq b$ entonces

Por lo que:

$$\oint_C P dx = \int_{C_1} P(x, y) dx - \int_{C_2} P(x, y) dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

$$= \int_a^b [P(x, g_1(x)) dx - P(x, g_2(x))] dx$$

$$= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) dx - P(x, g_1(x))] dx$$

$$= -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

De manera análoga se puede demostrar la segunda igualdad, describiendo R del tipo II.

Notación vectorial del Teorema de Green
Siendo $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$,

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left\langle 0\ ,0\ ,\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La igualdad del teorema de Green puede escribirse por lo tanto de la siguiente manera:

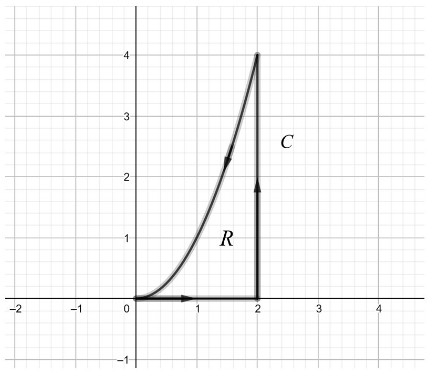
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R rot\vec{F} \cdot \vec{k}\ dA$$

6.9.1. Aplicaciones del teorema de Green

1. **Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ mediante una integral doble**

   - **Ejemplo:** Siendo R la región del plano limitada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$, evaluar aplicando el teorema de Green la circulación del campo vectorial $\vec{F} = \langle (x^3 + y^3), 3xy^2 \rangle$, a lo largo de la curva frontera de R, con orientación antihoraria.

     Graficamos para comprender la región R y su frontera:

     Debemos verificar que se satisfacen las hipótesis del teorema:

     C es la curva frontera de R y es una curva cerrada, simple, suave a trozos y con orientación antihoraria (consiste en el segmento desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$, seguido por el segmento desde $(2,0)$ hasta $(2,4)$ seguido por la porción de parábola de ecuación $y = x^2$ que va desde $(2,4)$ hasta $(2,0)$).

$P = x^3 + y^3$, $Q = 3xy^2$ son las componentes del campo vectorial $\vec{F}$. P y Q son funciones polinomiales, tienen por lo tanto derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2$. C y R están incluidas en ese conjunto D.

Por el teorema de Green, podemos entonces afirmar que:

$$\oint_C \left(x^3 + y^3\right) dx + 3xy^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

de modo que el valor de la circulación puede obtenerse resolviendo la integral doble:

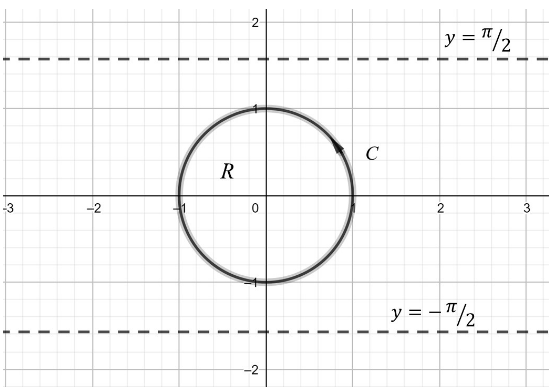
$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R \left(3y^2 - 3y^2\right) dA = \iint_R 0 \; dA = 0$$

Comentario: El cálculo directo de la circulación (sin la aplicación del teorema) implicaría en este caso resolver tres integrales de línea (¿cuáles?).

- **Ejemplo:** Siendo C la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y con orientación antihoraria, calcular aplicando el teorema de Green $\oint_C (3y - e^x)dx + (7x - sec\; y)dy$.

La circunferencia C es cerrada, simple , suave y se supone con orientación antihoraria. $\vec{F} = \{3y - e^x \; , \; 7x - sec\; y\rangle$. Sus componentes tienen derivadas parciales continuas en los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$. En particular, las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$$



C y la región R limitada por C están incluidas en ese conjunto D. Entonces, por el teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^x)dx + (7x - sec\ y)dy \ = \iint_R (7-3)dA =$$

$$= 4 \iint_R dA = 4\ área(R) = 4\pi$$

.

Pregunta: ¿cuál es el valor de la circulación si se orienta a la circunferencia en sentido horario?

2. **Cálculo del área de una región del plano mediante una integral de línea**

Si consideremos un campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \langle P(x,y), Q(x,y) \rangle$ cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2$ y tales que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Entonces, si C es cerrada, simple, suave a trozos y con orientación antihoraria y R es la región limitada por C, por el teorema de Green, en este caso, es:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R 1\ dA = área\ de\ R\ .$$

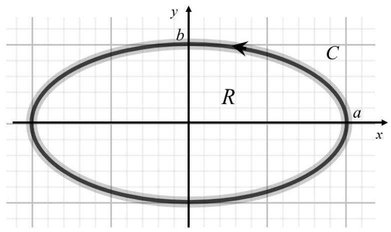
Por ejemplo es posible utilizar el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \langle 0, x \rangle$ resultando:

$$\boxed{\oint_C xdy = \iint_R 1\ dA = área\ de\ R\ .}$$

También es posible utilizar el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left\langle -\dfrac{y}{2}, \dfrac{x}{2} \right\rangle$

Resulta entonces que, el área de la región R puede calcularse con la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de C.

Ejemplo: el área de la región R del plano limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se puede calcular mediante la integral de línea utilizando por ejemplo el campo vectorial $\vec{F} = \left\langle -\dfrac{y}{2}, \dfrac{x}{2} \right\rangle$ a lo largo de $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle a\ cost, b\ sent \rangle$, con $t \in [0, 2\pi]$.

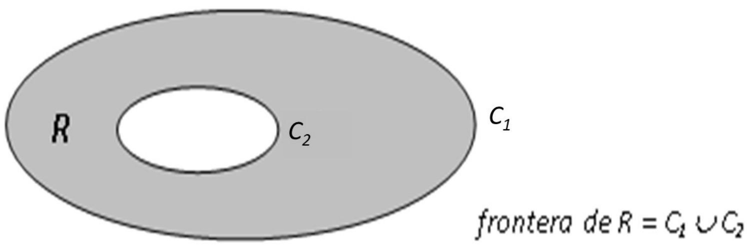


$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left\langle -\frac{b\ sent}{2}, \frac{a\ cost}{2} \right\rangle$$
$$\vec{r}\,'(t) = \langle -a\ sent, b\ cost \rangle$$
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = \frac{a\ b}{2}$$
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{a\ b}{2} dt = a\ b\ \pi = \acute{a}rea\ de\ R.$$

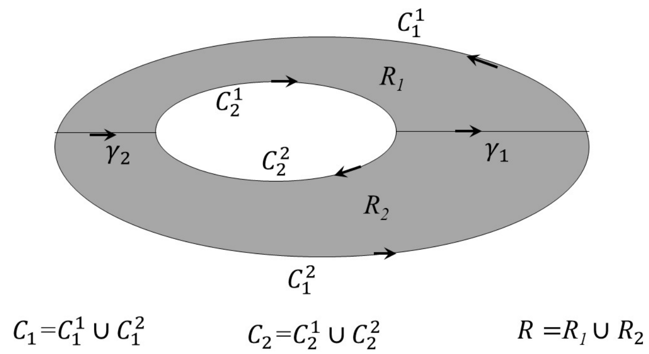
Nota: Si la región a la que se le quiere calcular el área mediante una integral de línea usando este resultado, tiene por borde una curva suave a trozos, en ese caso se deberá calcular la suma de las integrales de línea de cada trozo, recorridas en sentido antihorario.

6.9.2. Generalización del teorema de Green

Consideremos ahora una región anular R como la que muestra la figura siguiente. Noten que R está limitada por dos curvas cerradas C_1 y C_2.



Orientemos a C_1 con orientación antihoraria y a C_2 con orientación horaria y consideremos dos curvas auxiliares γ_1 y γ_2. Así R puede verse como la unión de dos regiones R_1 y R_2 cada una de las cuales tiene una curva cerrada como frontera.



La curva frontera de R_1 es la curva cerrada $C_1^1 \cup \gamma_2 \cup C_2^1 \cup \gamma_1$

La curva frontera de R_2 es la curva cerrada $C_2^2 \cup (-\gamma_2) \cup C_1^2 \cup (-\gamma_1)$

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ que contenga a C_1, a C_2 y a R, entonces , por el teorema de Green podemos afirmar que:

$$\int_{C_1^1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2^1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_1} rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$$

$$\int_{C_2^2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1^2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_2} rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$$

y sumando miembro a miembro:

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R} rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA}$$

Caso particular: Si, en las condiciones anteriores, se tiene además que $\forall (x, y) \in D$ es $rot\vec{F}(x, y) = \vec{0}$, entonces

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

o sea

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(las integrales de línea arrojan el mismo resultado si ambas curvas están orientadas de la misma manera)

6.9.3. Ejercicios

1. Evalúen las siguientes integrales aplicando el teorema de Green siempre que sea posible:

   a) $\oint_C (x^2 - y)dx + y^2 dy$ siendo $C : x^2 + y^2 = 1$ con orientación antihoraria.

   b) $\oint_C (y^2 + x)dx + (3x + 2xy)dy$ siendo $C : x^2 + y^2 = 4$ con orientación horaria.

   c) $\oint_C (y^2 - 2x)dx + y^2 dy$ siendo C la frontera del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(1,0)$ con orientación antihoraria.

   d) $\oint_C \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy$ siendo: i) $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ con orientación antihoraria. ii)$C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1$ con orientación antihoraria.

   e) $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$ siendo: i) $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ con orientación antihoraria. ii) $C_2 : x^2 + (y-2)^2 = 1$ con orientación antihoraria.

   f) $\oint_C (y^2 + 3x^2 y)dx + (xy + x^3)dy$ siendo C la frontera de la región limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$, con orientación antihoraria.

   g) $\oint_C (ye^{xy} + y)dx + (2x + xe^{xy})dy$ siendo C la frontera de la región limitada por $y = x^2$ e $y = 4$, con orientación antihoraria.

   h) $\oint_C (ysec^2 x - 2)dx + (tgx - 4y^2)dy$ siendo C la frontera de la región limitada por $x = 1 - y^2$ y $x = 0$, con orientación antihoraria.

2. Calculen el área de las siguientes regiones mediante una integral de línea:

   a) R limitada por la elipse $4x^2 + y^2 = 16$.

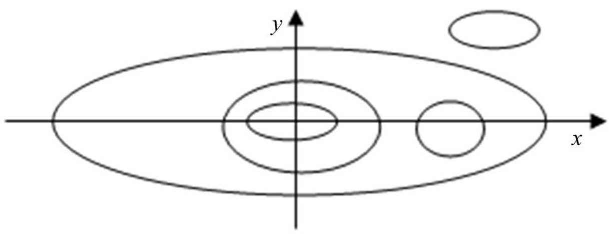
   b) R limitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

c) R limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

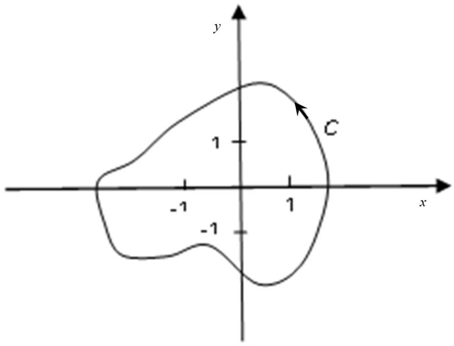
d) R limitada por la curva $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle cos^3 t, sen^3 t \rangle \quad t \in [0, 2\pi]$

3. Muestren que la circulación de $\vec{F} = \langle xy^2, x^2y + 2x \rangle$ a lo largo de la frontera de un cuadrado, depende del área del cuadrado y no de su ubicación en el plano.

4. Sea $\vec{F} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$, P y Q con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y $rot\vec{F}(x, y) = \vec{0} \;\; \forall (x, y) \in D$ ¿Qué pueden afirmar acerca de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para las curvas que aparecen en la siguiente figura? Nombren y orienten las curvas. Justifiquen sus afirmaciones.



5. Calculen la circulación de $F_1 = \left\langle \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right\rangle$ y la circulación de $F_2 = \left\langle \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$ a lo largo de la curva C de la figura siguiente. Sugerencia: recuerden que en un ejercicio previo han calculado la circulación de esos campos a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.



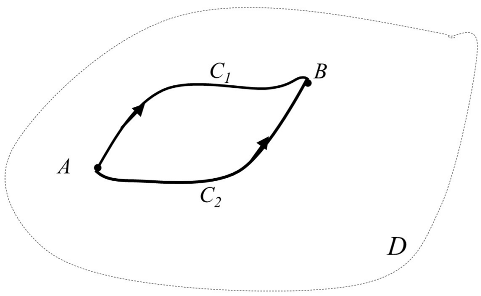
6.10. Independencia del camino

El resultado de $\int_C \vec{F}.\, d\vec{r}$ depende, en general, del campo vectorial $\vec{F}$ y de la curva C, pero no siempre es así. Para algunos campos vectoriales $\vec{F}$ el resultado de $\int_C \vec{F}.\, d\vec{r}$ es el mismo para todas las curvas de cierto conjunto D que tengan el mismo punto inicial A y el mismo punto final B. Cuando esto sucede decimos: *la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D.* Más precisamente:

Definición. Independencia del camino

La integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente del camino* en D ($D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$) si, para todo par de puntos $A, B \in D$ y para todo par de trayectorias C_1 y C_2 con punto inicial A y punto final B incluidas en D, es

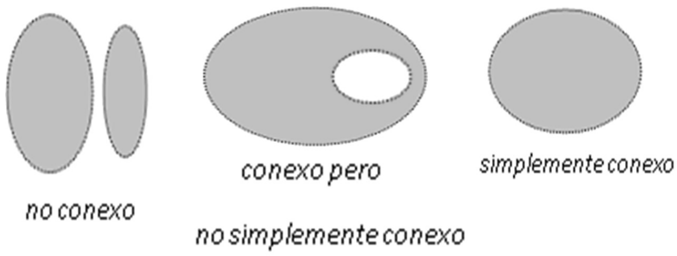
$$\int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}.\, d\vec{r}$$



La importancia de conocer que una *integral es independiente del camino* se relaciona con varios conceptos fundamentales en matemáticas y física, especialmente en el contexto de cálculo y teoría electromagnética. El saber que una integral sea independiente del camino es fundamental, ya que simplifica cálculos, esto implica que, para calcular la integral definida, no es necesario conocer el camino exacto a lo largo del cual se integra la función, si no que solo importan los valores iniciales y finales del intervalo.

Dominios conexos y simplemente conexos

Un conjunto D es *conexo* si para todo par de puntos de D pueden conectarse por medio de una trayectoria incluida en D.
Un conjunto D es *simplemente conexo* si es conexo y además, para toda curva cerrada $C \subset D$, la región R limitada por C también está incluida en D.



Observación: Un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si toda C cerrada es frontera de una región plana R incluida en D. Básicamente es una región sin agujeros, sin huecos, ni siquiera un hueco formado por un único punto. Un subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo si toda C cerrada es frontera de una superficie S incluida en D. Por ejemplo: $D = \mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, $D = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ es simplemente conexo, pero $D = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z)/x = y = 0\}$ no es simplemente conexo.

Vemos ahora un resultado importante que nos permite conocer si una integral de linea es independiente del camino.

Teorema fundamental para integrales de línea

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial con componentes continuas en D ($D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$) y C una curva suave a trozos contenida en D desde A a B. Si $\vec{F}$ es conservativo en D (es decir que existe una función potencial f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$) entonces la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D y

$$\int_C \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f.\, d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Demostración:

Si $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ y $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ *con* $t \in [a, b]$ entonces

$$\int_C \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f.\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{\nabla} f\,(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\; dt = \int_a^b g'(t)\; dt = g(b) - g(a)$$

donde $g(t) = f\,(x(t), y(t), z(t)) = f(\vec{r}(t))$ es continua en $[a, b]$
Entonces

$$\int_C \vec{F}.\, d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

Observación:

El resultado anterior es sumamente importante, pues da una condición suficiente para la independencia del camino, ya que el cálculo se reduce –prescindiendo de la curva– a evaluar la función potencial en el extremo B y restarle el valor que toma en A, resultando ser una diferencia de potencial.

Una interpretación física:

Si el campo es un campo de fuerzas conservativo entonces el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria, sólo depende del valor del potencial en el punto inicial y en el punto final. Notar además que, si los puntos A y B se encuentran sobre las misma *curva equipontencial* en estos casos, no se realizará trabajo, ya que no hay cambio de potencial. Ejemplo de ello es el trabajo realizado por el *campo potencial gravitatorio*, donde la función potencial mide la altitud sobre el nivel del mar. Cuando se mueva una partícula sobre una curva de altura constante, no hay cambio de potencial gravitatorio, y en ese caso no hay trabajo.

Ejemplo: El campo vectorial $\vec{F} = \langle 2x, 3y^2 \rangle$ tiene componentes continuas en $D = \mathbb{R}^2$ por ser polinómicas, y es conservativo en ese conjunto, ya que su rotor es el vector cero, siendo $f(x, y) = x^2 + y^3$ una función potencial de $\vec{F}$ en $D = \mathbb{R}^2$. Entonces, por ejemplo, $\forall C$ con punto inicial $(0, 0)$ y punto final $(1, 1)$, por el teorema fundamental para integrales de línea podemos afirmar que

$$\int_C \vec{F}.\, d\vec{r} = f(1, 1) - f(0, 0) = 2 - 0 = 2.$$

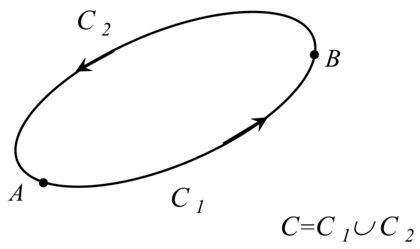
Veamos ahora algunos otros resultados válidas que colaboran con el conocimiento de independencia del camino.

Observación 1:

Si la integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ es independiente del camino en cierto conjunto D entonces la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada incluida en D es igual a cero.

Demostración:

En efecto, sea $C \subset D$ una curva cerrada y A y B dos puntos de C, $C = C_1 \cup C_2$ donde $C_1 \subset D$ con punto inicial A y punto final B y $C_2 \subset D$ con punto inicial B y punto final A:



entonces,

$$\oint_C \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F}.\, d\vec{r} = 0$$

ya que $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_{-C_2} \vec{F}.\, d\vec{r}$ pues C_1 y $-C_2$ son dos curvas de D con punto inicial A y punto final B.

Observación 2:

Si la integral de línea de $\vec{F}$ es igual a cero a lo largo de toda curva cerrada $C \subset D$ entonces, la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D.

Demostración:

En efecto, para todo par de puntos $A, B \in D$ y para todo par de trayectorias C_1 y C_2 con punto inicial A y punto final B incluidas en D, $C_1 \cup (-C_2)$ es una curva cerrada incluida en D por lo que

$$\int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}.\, d\vec{r} = 0$$

y entonces

$$\int_{C_1} \vec{F}.\, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}.\, d\vec{r}$$

Observación 3:

Sea $\vec{F}$ un campo conservativo con componente con derivadas parciales continuas en D entonces $rot\vec{F} = \vec{0}$ en D.

Demostración:

Para realizar esta demostración se calcula el rotor del campo vectorial, que al ser un campo gradiente, es calcular

$$rot(\vec{\nabla} f)$$

y comprobar que su valor es

$$= \vec{0}$$

. Este resultado fue realizado en el ejercicio de la sección de campos vectoriales.

Observación 4:

Sea $\vec{F}$ con componentes con derivadas parciales continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$, D simplemente conexo. Si $rot\vec{F} = \vec{0}$ en D entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda C cerrada en D.

Demostración:

Para justificar la validez del enunciado anterior, consideremos C cerrada, simple y suave a trozos incluida en D. Como D se supone *simplemente conexo*, la región R limitada por C está incluida en D y como las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en D se puede aplicar el teorema de Green para concluir que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA = \iint_R 0\, dA = 0.$$

El siguiente teorema reúne alguno de los resultados tratados a lo largo de esta sección y es válido para campos vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ en un conjunto *simplemente conexo*.

Teorema

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un *dominio simplemente conexo* D ($D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$) entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\vec{F}$ es conservativo en D
2. La integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D (si C tiene punto inicial A y punto final B, $\displaystyle\int_C \vec{F}.\,d\vec{r} = f(B) - f(A)$ donde f es una función potencial de $\vec{F}$).
3. $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda C cerrada en D
4. $rot\vec{F} = \vec{0}$ en D.

Comentarios:

i)Decir que las 4 afirmaciones *son equivalentes* significa que, verificándose las hipótesis requeridas, si una de las afirmaciones es verdadera entonces todas las demás también lo son.

ii) Si una de las afirmaciones no se cumple, entonces ninguna se cumple.

iii) Observar que las proposiciones 1), 2) y 3) son equivalentes en un **conjunto conexo**.

iv) Para probar el teorema se debe demostrar que 1) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3), 3) $\Longrightarrow$ 4) y 4) $\Longrightarrow$ 1). Notar que algunas de estas implicaciones, y otras, las hemos enunciado y probado en las observaciones mencionadas antes.

v) Este teorema nos ofrece una herramienta para afirmar si un campo es conservativo, sólo calculando su campo rotor. Por otro lado, nos brinda una forma más simple para calcular una integral de trabajo, mediante su función potencial evaluada en el punto final de la curva menos en el punto inicial, o bien considerar realizar la integral de linea por un camino conveniente. Por otro lado, el cálculo de una circulación, bajo las hipótesis del teorema, es cero.

6.10.1. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, muestren que el campo vectorial es conservativo en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ (según corresponda) y utilicen esa información para calcular la integral de línea a lo largo de la curva propuesta.

   a) $\vec{F} = \langle 2xy, x^2 - 1\rangle$ y C desde $(1, 0)$ hasta $(3, 1)$.

   b) $\vec{F} = \langle ye^{xy}, xe^{xy} - 2y\rangle$ y C desde $(1, 0)$ hasta $(0, 4)$.

c) $\vec{F} = \langle z^2 + 2xy, x^2, 2xz\rangle$ y C desde $(2, 1, 3)$ hasta $(4, -1, 0)$.

d) $\vec{F} = \langle 2x\cos z - x^2, z - 2y, y - x^2 \operatorname{sen} z\rangle$ y C desde $(3, -2, 0)$ hasta $(1, 0, \pi)$.

2. Calculen el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = \langle -y, -x\rangle$ al desplazar una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(1, 1)$ hasta $(-1, 1)$ y desde ese punto hasta el $(1, 1)$ a lo largo de la recta $y = 1$.

3. Grafiquen el campo vectorial $\vec{F} = \langle 0, x\rangle$. Hallen tres trayectorias diferentes C_1 , C_2 y C_3 que vayan desde (2,0) hasta (−2,0) tales que:
$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} > 0$ y $\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0$
¿Es $\vec{F}$ un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$?

4. Evalúen las siguientes integrales aplicando, siempre que sea posible, algún resultado teórico.

a) $\int_C xdx + ydy + zdz$ donde $C : r = r(t) = \langle cost, sent, 2t\rangle \quad t \in [0, 2\pi]$

b) $\int_C \left(x^2 + 1\right) dx + (y^3 - 3y + 2)dy$ donde $C : y = \sqrt{16 - x^2}$ desde $(-4, 0)$ hasta $(4, 0)$

c) $\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$ siendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y C el segmento de recta desde $(1, 1, 1)$ hasta $(2, 1, 2)$.

d) $\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$ siendo $f(x, y) = x^2 + y^2$ y C la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

5. ¿Cuáles de los siguientes son campos vectoriales son conservativos en el conjunto D indicado?

a) $\vec{F} = \langle 3xz, x^2, xcosy\rangle$; $D = \mathbb{R}^3$

b) $\vec{F} = \langle y, -x, 0\rangle$; $D = \mathbb{R}^3$

c) $\vec{F} = \langle x, 0, z\rangle$; $D = \mathbb{R}^3$

d) $\vec{F} = \dfrac{\langle x, y, z\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $D = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

e) $\vec{F} = \dfrac{\langle -y, x\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

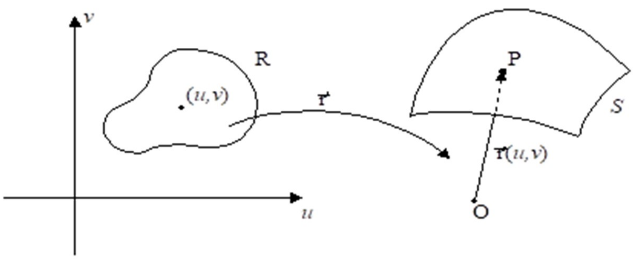
Capítulo 7

Superficies e integrales de superficie

7.1. Superficies

Para poder abordar la definición, el cálculo y las propiedades de las integrales de superficie necesitaremos describir las superficies mediante una ecuación vectorial paramétrica, como lo hemos hecho antes con las curvas, al estudiar las integrales de línea.

Una *descripción vectorial paramétrica* de una superficie S consiste en una ecuación de la forma $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in R$, donde u y v son los parámetros, R (dominio paramétrico) es una región del plano uv y, para cada $(u, v) \in R$, $\vec{r}(u, v) = \vec{0P}$, siendo P un punto de S.



Las componentes del vector $\vec{r}(u, v)$ son tres funciones de las variables

u y v , a valores reales: $\vec{r}(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}$

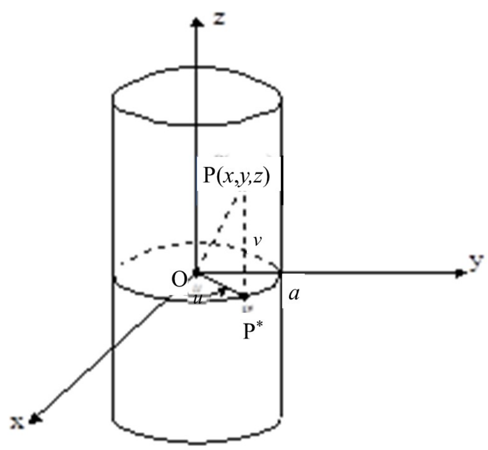
$$\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \\ z = Z(u,v) \end{cases} \quad ; \ (u,v) \in R$$

es un *sistema de ecuaciones paramétricas* de S.

Ejemplos:

- Consideremos la superficie S definida por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.
  S es una superficie cilíndrica. Tomando como referencia las coordenadas cilíndricas, un punto $P \in S$ queda individualizado por el ángulo de giro (θ) y la cota (z), ya que r es constante e igual a a para todos los puntos de S.
  Podemos entonces describir la superficie S mediante el siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

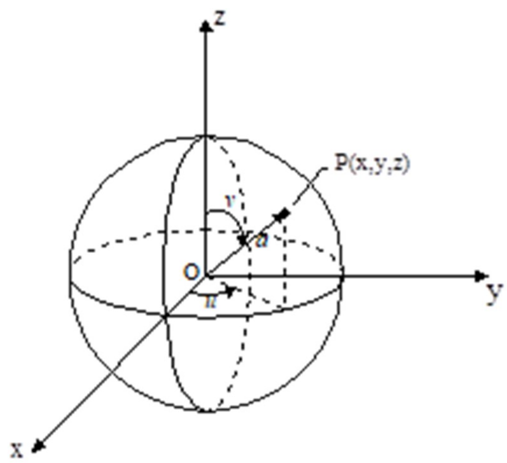
$$\begin{cases} x = a\ cosu \\ y = a\ senu \\ z = v \end{cases} \quad ; \ 0 \leq u \leq 2\pi \ \ ; \ \ v \in R$$



$$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = a\ cosu\ \vec{i} + a\ senu\ \vec{j} + v\ \vec{k};\ 0 \leq u \leq 2\pi \ \ ; \ \ v \in \mathbb{R}$$

- Si S es la superficie esférica definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, considerando ahora las coordenadas esféricas como referencia, un punto de S queda identificado por las coordenadas θ y φ (ρ es constante e igual a a en todos los puntos de S) . Se tiene entonces la siguiente descripción paramétrica de S:

$$\begin{cases} x = a\ cosu\ senv \\ y = a\ senu\ senv \\ z = a\ cosv \end{cases} ;\ 0 \leq u \leq 2\pi\ ;\ \ 0 \leq v \leq \pi$$



$$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = a\ cosu\ senv\ \vec{i} + a\ senu\ senv\ \vec{j} + a\ cosv\ \vec{k}\ ;\ 0 \leq u \leq 2\pi\ \ ;\ \ 0 \leq v \leq \pi$$

En este caso el dominio paramétrico, $R = \{(u,v)/0 \leq u \leq 2\pi \wedge 0 \leq v \leq \pi\}$, es una región cerrada y acotada del plano uv y S es una superficie acotada.

- Sea S el paraboloide definido por la ecuación $z = x^2 + y^2$. La superficie S es la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Haciendo $u = x$ y $v = y$ se tiene la *parametrización trivial* para S : $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases}$

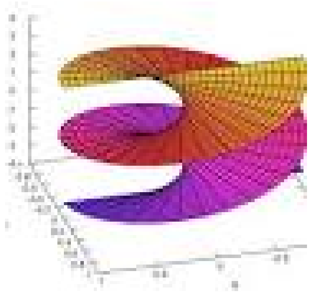
  (trivial pues los parámetros u y v representan aquí a las mismas variables x e y).

  $$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = u\ \vec{i} +\ v\ \vec{j} + (u^2 + v^2)\ \vec{k};\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

  .

- Sea S una *superficie helicoidal*, su borde es una hélice. Esta superficie no es posible representarla en coordenadas cartesianas, pero si en forma paramétrica. El helicoide tiene forma de tornillo de Arquímedes. Se puede describir mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\,\mathrm{sen}(v) \\ z = v \end{cases}$$



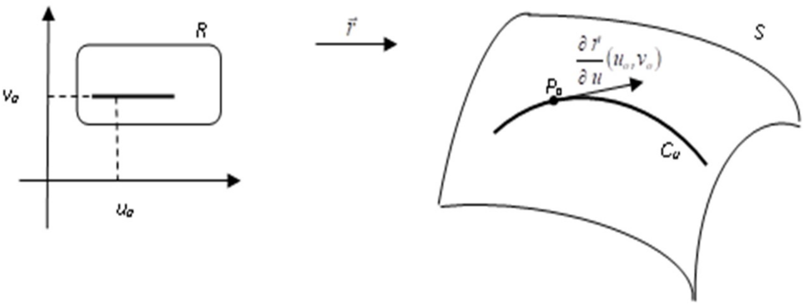
- Para la visualización y cálculo de integrales de superficie puedes ayudarte de las aplicaciones creadas en **GeoGebra**.

Actividad
Parametrizar las siguientes superficies:

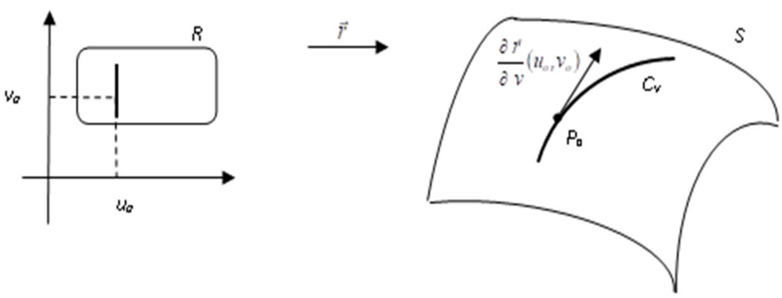
- $S : x^2 + y^2 = 4$ limitada por $z = 0$ y $z = 4$
- $S : x^2 + y^2 = 25$ limitada por $z = 0$ e $y + z = 6$
- $S : x^2 + y^2 = 4$ limitada por $y + z = 4$ e $y - z = 4$
- $S : x^2 + y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ y $x + y + z = 4$
- $S : z^2 + y^2 = 1$ limitada por $x = -1$ y $x = 1$
- $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $z = 0$ y $z = 4$
- $S : z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2y$
- $S : Ax + By + Cz + D = 0$
- $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 4$
- $S : x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

Dirección normal a una superficie

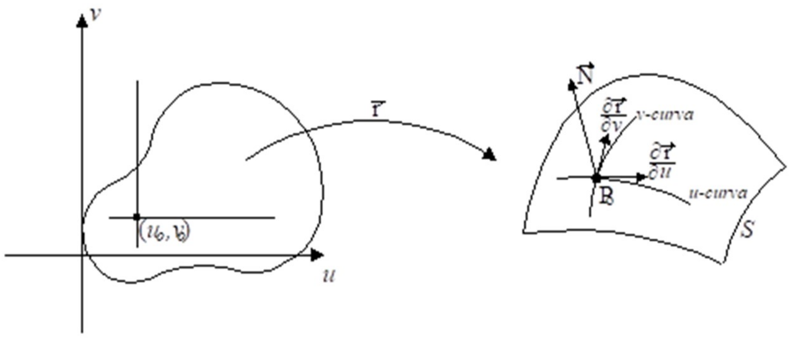
Consideremos $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$; $(u, v) \in R$ y un punto P_0 de S que proviene de $(u_0, v_0) \in R$ mediante $\vec{r}$. Supondremos que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ existen y son continuas en (u_0, v_0) y que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ son no nulos y no colineales (cuando estas condiciones se cumplen en todos los puntos de R diremos que S es una *superficie suave*).



$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ define la dirección tangente a $C_u : \vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ en P_0
(C_u se llama *u-curva* y es la imagen de un segmento horizontal que pasa por (u_0, v_0) y está contenido en R).



$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ define la dirección tangente a $C_v : \vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ en P_0
(C_v se llama *v-curva* y es la imagen de un segmento vertical que pasa por (u_0, v_0) y está contenido en R).



$\left.\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$ es ortogonal a $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y a $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ (es ortogonal a C_u y a C_v en P_0) y se puede mostrar que lo mismo es cierto para cualquier curva contenida en S pasando por P_0.

Denotaremos con la letra $\vec{N}$ al vector $\left.\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$ o a su opuesto $\left.\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ y nos referiremos a $\vec{N}$ como *el vector normal a S en P_0*.

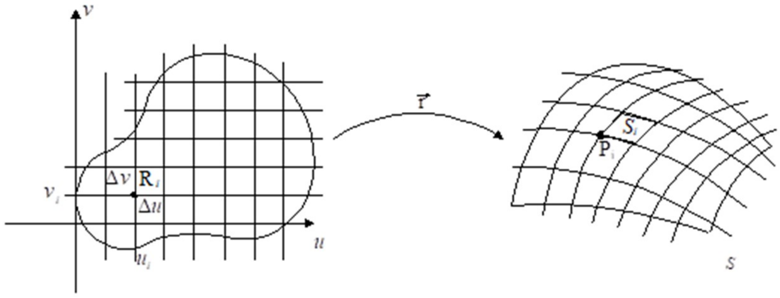
El plano determinado por $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ es el *plano tangente a S en P_0* ($\vec{N}$ es normal a ese plano).

7.2. Área de una superficie

Sea S una superficie suave y acotada:

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) \ ; \ (u, v) \in R$$

Definamos una partición en R por medio de rectas de la forma $u = cte$ y $v = cte$. Estas rectas producirán en S un conjunto de $u - curvas$ y de $v - curvas$ generando una subdivisión de la superficie en porciones S_i. ¿Qué relación hay entre las áreas de dichas porciones S_i y las áreas de los rectángulos R_i en los que se ha dividido R?

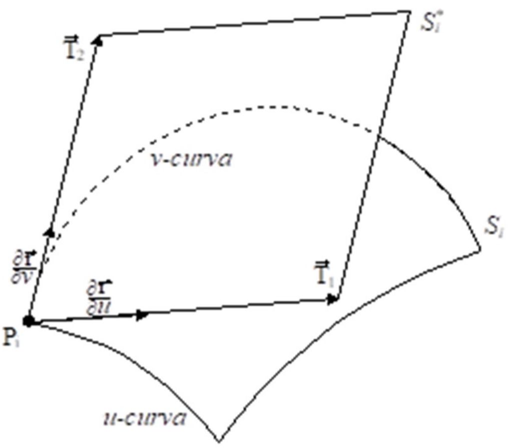


Supongamos que R_i se transforma en S_i siendo $P_i \leftrightarrow \vec{r}(u_i, v_i)$

Sean $\Delta S_i = \textit{área de } S_i$ y $\Delta R_i = \textit{área de } R_i = \Delta u \Delta v$

$\Delta S_i \approxeq \Delta S_i^* = \textit{área de un paralelogramo (porción del plano tangente a } S \textit{ en } P_i)$

de lados: $\vec{T_1} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_i)\Delta u$ y $\vec{T_2} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_i)\Delta v$



$$\Delta S_i \approxeq \Delta S_i^* = \left|\vec{T_1} \times \vec{T_2}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_i,v_i)} \Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_i,v_i)} \Delta R_i$$

O sea:

$$\Delta S_i \approxeq \left|\vec{N}\right|_{P_i} \Delta R_i$$

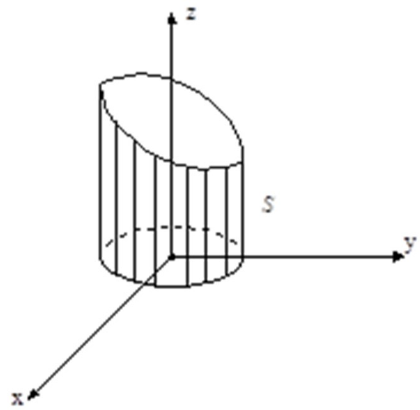
Resulta entonces que:

$$Área\ de\ S \approxeq \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{N}\right|_{P_i} \Delta R_i$$

y de allí:

$$\boxed{Área\ de\ S = \iint_{R_{uv}} \left|\vec{N_{uv}}\right| dudv}$$

Ejemplo: Calcular el área de $S : x^2 + y^2 = 4$ limitada por $z = 0$ y $z + y = 4$.



$S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = 2\ cosu\ \vec{i} + 2\ senu\ \vec{j} + v\ \vec{k};\ 0 \leq u \leq 2\pi\ \ ;\ \ 0 \leq v \leq 4 - 2senu$

.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -2\ senu\ \vec{i} + 2\ cosu\ \vec{j} + 0\ \vec{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0\ \vec{i} + 0\ \vec{j} + 1\ \vec{k}$$

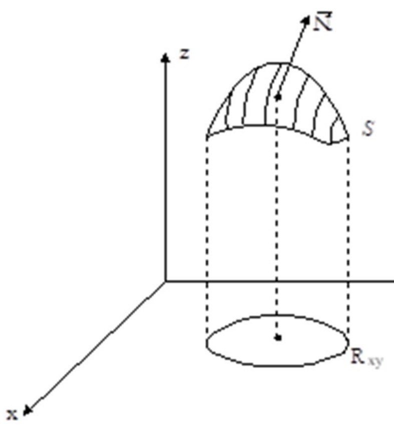
$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\ senu & 2\ cosu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\ cosu\vec{i} + 2\ senu\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2$$

Entonces, *área (S)* $= \displaystyle\iint_{R_{uv}} 2\, dA_{uv} = \int_0^{2\pi}\int_0^{4-2senu} 2\, dv\, du = 16\pi.$

Si la superficie S es la gráfica de una función, o sea, por ejemplo,

$$S : z = f(x, y) \ \ ; \ \ (x, y) \in R$$



podemos escribir una parametrización trivial para S: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = u\,\vec{i} + \ v\,\vec{j} + f(u, v)\,\vec{k};\ (u, v) \in R$$

.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = 1\vec{i} + 0\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\vec{k} \qquad\qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\vec{k}$$

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}$$

Ya que en lo anterior es $u = x$ y $v = y$, podemos decir que:

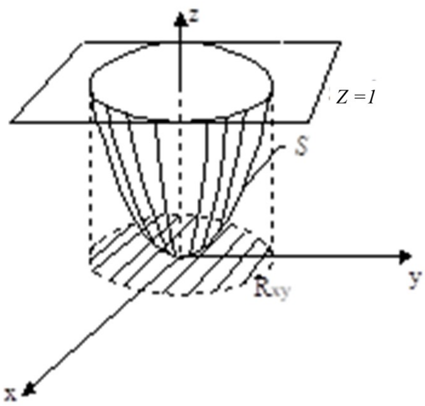
Si $S : z = f(x, y)$; $(x, y) \in R$ *y* f *tiene derivadas parciales continuas,*

$$\vec{N} = \pm \left\langle -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right\rangle$$

y

$$\acute{A}rea(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \ dxdy$$

Ejemplo: Calcular el área de $S : z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 1$



En este caso es $S : z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con $(x, y) \in R$ donde

$$R = \left\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

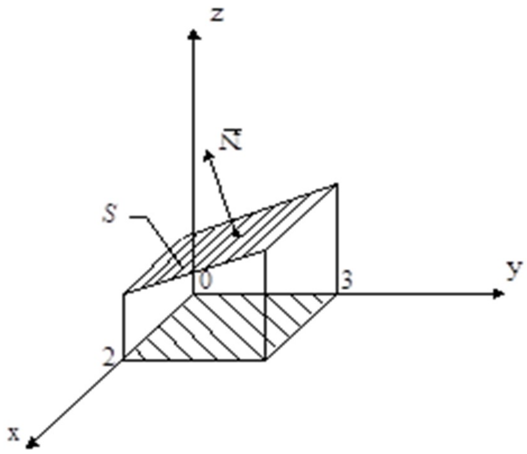
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad , \quad \vec{N} = \pm \langle -2x, -2y, 1 \rangle$$

$$\acute{a}rea(S) = \iint_R \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} \ dA_{xy} =$$

$$= \iint_R \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1} \ dA_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \ r \ dr \ d\theta =$$

$$= 2\pi \int_1^5 \sqrt{u} \ \frac{du}{8} = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

Ejemplo: Calcular el área de $S : 2x - 3y + 4z - 3 = 0$ limitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$.



Observación: El vector $\vec{u} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\vec{k}$ es normal al plano dado, pero no es necesariamente el vector requerido para el cálculo del área. Para calcular el área de una superficie debemos comenzar por dar una representación vectorial paramétrica o una representación explícita (como gráfica de función) de la misma y calcular consecuentemente el vector normal $\vec{N}$ y su módulo, asociados a tal parametrización.

Viendo que en el ejemplo es

$$S : z = \frac{3 - 2x + 3y}{4} = f(x, y) \quad , \quad (x, y) \in R$$

$$R = \{(x, y)/0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 3\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2}{4} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{4} \quad , \quad \vec{N} = \left\langle \frac{2}{4}, -\frac{3}{4}, 1 \right\rangle$$

$$\acute{a}rea(S) = \iint_R \sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1}\ dA_{xy} = \int_0^2 \int_0^3 \frac{\sqrt{29}}{4} dy\, dx = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

7.2.1. Ejercicios

1. Identifiquen las siguientes superficies y hallen el vector normal $\vec{N}$

a) $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = a\ cosu\ \vec{i} + a\ senu\ \vec{j} + v\ \vec{k}\ \ ,\ \ (u, v) \in R$
$R = \{(u, v)/0 \leq u \leq 2\pi\ \ ;\ \ v \in \mathbb{R}\}$.

b) $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = a\ cosu\ senv\ \vec{i} + a\ senu\ senv\ \vec{j} + a\ cosv\ \vec{k}$
$(u, v) \in R = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$

2. Calculen el área de:

a) S : superficie esférica de radio a.

b) $S : x^2 + y^2 = 4$ limitada por $z = y$, en el primer octante.

c) $S : x + 2y + 2z = 5$ limitada por $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.

d) $S : y + 2z = 2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$.

e) $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $z = 2$ y $z = 6$.

f) $S : z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2$ y $z = 6$.

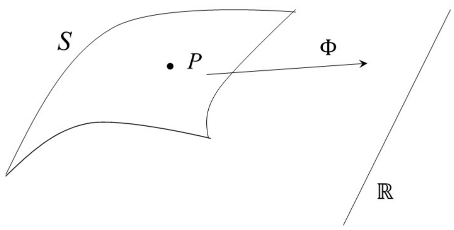
g) $S : z = 2 - x^2 - y^2$ limitada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

h) $S : y = 3x$ con $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

i) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ \ z \geq 0$ y $x^2 + y^2 \leq ay$.

7.3. Integral de superficie

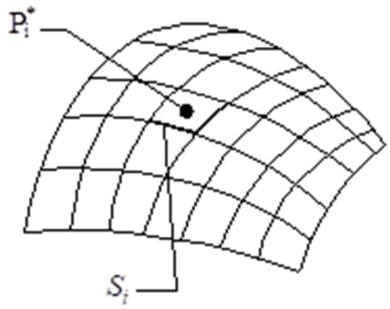
Sea S una superficie acotada y suave y ϕ una función a valores reales, definida y acotada sobre los puntos de S.



Sea $\mathcal{P}$ una partición de S en porciones S_i, de área ΔS_i, con $i = 1..n$.

Sea $|\mathcal{P}| = máx\ \{\delta_i/i = 1..n\}$ donde $\delta_i = máx\ \{d(P, Q)/P, Q \in S_i\}$

Sean $P_i^* \in S_i$ (cualquiera) y $J_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(P_i^*)\Delta S_i$



Si $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} J_n = I \in \mathbb{R}$, independientemente de las particiones y de los puntos P_i^* considerados, decimos que ϕ es integrable sobre S y que la integral de superficie de ϕ sobre S es igual a I . Siendo así, escribimos:

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS = I$$

Aplicaciones de la integral de superficie de una función escalar ϕ continua sobre S :

1) *Si S es acotada y suave,* $\iint_S 1\, dS = Área(S)$
2) *Si ϕ (continua y positiva) representa la densidad superficial de masa en la superficie S, entonces*

$$Masa(S) = \iint_S \phi(x, y, z)\, dS$$

3) *Si la función ϕ (continua y positiva) representa la densidad superficial de masa en la superficie S, entonces* las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de S *se calculan de la siguiente manera:*

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\, \phi(x, y, z)\, dS}{\iint_S \phi(x, y, z)\, dS}$$

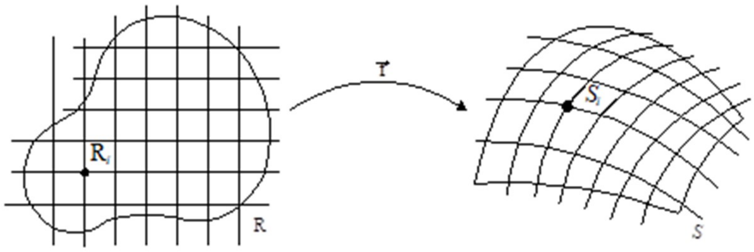
$$\bar{y} = \frac{\iint_S y\, \phi(x, y, z)\, dS}{\iint_S \phi(x, y, z)\, dS}$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z\, \phi(x, y, z)\, dS}{\iint_S \phi(x, y, z)\, dS}$$

El centro de masa de una superficie es el punto en el que se puede considerar que toda la masa de la superficie está concentrada. Si $\phi(x,y,z) = k \ \ \forall (x,y,z) \in S$, *el centro de masa se* llama *centroide* y sus coordenadas son:
$\bar{x} = \dfrac{\iint_S x \ \ dS}{\iint_S \ dS} \quad \bar{y} = \dfrac{\iint_S y \ \ dS}{\iint_S \ dS} \quad \bar{z} = \dfrac{\iint_S z \ \ dS}{\iint_S \ dS}$

Cálculo de la integral de superficie

Sea $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad con \quad (u,v) \in R$, acotada y suave y ϕ una función a valores reales, continua sobre S. Consideremos en R una partición con rectas paralelas a los ejes, que determinan un número finito de rectángulos R_i con áreas ΔR_i. Supongamos que n de esos rectángulos están contenidos en R. Esa partición de R se corresponde con una división de S en n porciones S_i con áreas ΔS_i.



Sabemos que $\Delta S_i \approxeq |N_i| \, \Delta R_i = \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_i \Delta R_i$

Cada punto $P_i^* \in S_i$ es extremo de un vector $\vec{r}(u_i^*, v_i^*)$ con $(u_i^*, v_i^*) \in R_i$ entonces:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(P_i^*) \Delta S_i \approxeq \sum_{i=1}^{n} \phi(\vec{r}(u_i^*, v_i^*)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_i \Delta R_i$$

Siendo $\phi(\vec{r}(u,v)) \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$ una función continua de las variables u y v (ya que ϕ y las derivadas parciales de $\vec{r}$ son continuas),

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} J_n = \iint_R \phi(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA$$

Es decir:

$$\boxed{\iint_S \phi(x,y,z)dS = \iint_R \phi(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA}$$

Si la superficie S es la gráfica de una función, o sea, por ejemplo,

$$S : z = f(x,y) \;\; ; \;\; (x,y) \in R$$

Según hemos visto, $\vec{N} = \left\langle -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right\rangle$ (o su opuesto) y por lo tanto,

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

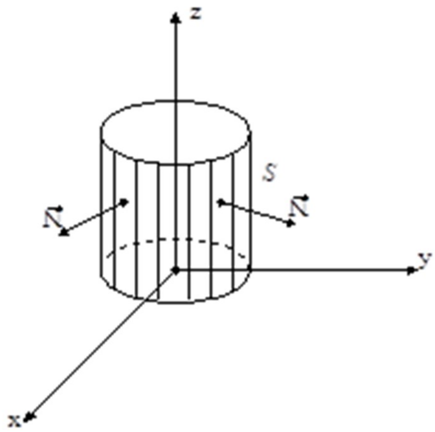
Resulta entonces en este caso que:

$$\iint_S \phi(x,y,z)dS = \iint_R \phi(x,y,f(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \; dA$$

Actividad: Planteen ustedes el cálculo de la integral de superficie en los casos: $S : y = f(x,z)$ *con* $(x,z) \in R$ y $S : x = f(y,z)$ *con* $(y,z) \in R$.

Ejemplos:

- Calcular $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS$ siendo $S : x^2 + y^2 = 4$ limitado por $z = 0$ y $z = 4$.

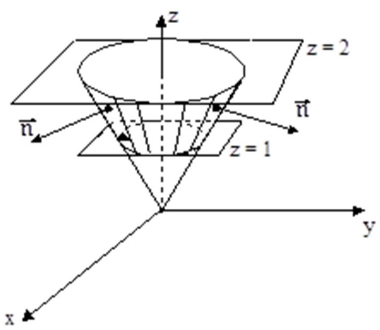


$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = 2cosu\ \vec{i} + 2senu\ \vec{j} + v\vec{k}\ \ con\ \ 0 \leq u \leq 2\pi\ \ ,\ \ 0 \leq v \leq 4$
$\phi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\ \ \rightarrow\ \ \phi(\vec{r}(u,v)) = \sqrt{4cos^2u + 4sen^2u} = 2$

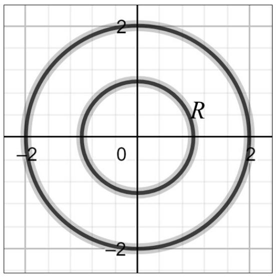
$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\ senu & 2\ cosu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\ cosu\vec{i} + 2\ senu\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\left|\vec{N}\right| = 2 \qquad \therefore \qquad \iint_S \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \int_0^{2\pi}\int_0^4 2\ .\ 2\ dv\ du = 4{,}4{,}2\pi = 32\pi$$

- Calcular $\iint_S z\ dS$ siendo $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $z = 1$ y $z = 2$.



$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ (x, y) \in R \quad \text{con} \quad R = \{(x, y)/1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$$\vec{N} = \left\langle -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right\rangle \quad \text{y} \quad \left|\vec{N}\right| = \sqrt{2}$$

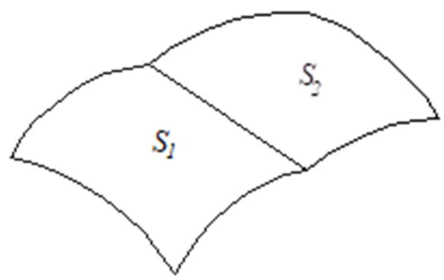
$$\phi(x, y, z) = z \quad \rightarrow \quad \phi(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \quad \iint_S z\ dS = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{2}\ dA =$$

para calcular la integral doble conviene en este caso hacer un cambio de variables usando coordenadas polares

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r\sqrt{2}\ r\ drd\theta = \sqrt{2}\ 2\pi\ \frac{r^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{14}{3}\sqrt{2}\ \pi$$

La superficie S sobre la que se integra puede ser unión finita de superficies suaves. Si $S = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 \cap S_2$ es un conjunto de área nula y ϕ es integrable sobre S_1 y sobre S_2, entonces $\iint_S \phi\ dS = \iint_{S_1} \phi\ dS + \iint_{S_2} \phi\ dS$



7.3.1. Ejercicios

1. Integrar:

   a) $\phi(x,y,z) = x+y+z$ sobre $S : x^2+y^2 = 1$ con $1 \leq z \leq 2$.

   b) $\phi(x,y,z) = z$ sobre $S : y^2+z^2 = 4$ con $1 \leq x \leq 4$, $z \geq 0$.

   c) $\phi(x,y,z) = z^2$ sobre $S : x^2+y^2+z^2 = a^2$ con $z \geq 0$.

   d) $\phi(x,y,z) = yz$ sobre $S : x^2+y^2+z^2 = 4$ con $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.

   e) $\phi(x,y,z) = x$ sobre $S : y = x^2$ con $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

2. Calculen el centroide de $S : x^2+y^2+z^2 = a^2$, limitada por los planos coordenados, en el primer octante.

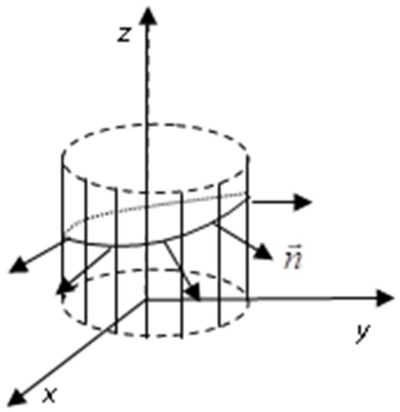
7.4. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Sea $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ *con* $(u,v) \in R$, una superficie suave, esto es: en los puntos de R existen y son continuas $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ y esos vectores son no nulos y no colineales, determinando, en el correspondiente punto de S, el vector normal $\vec{N}$, $\left(\vec{N} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad o \quad \vec{N} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)$ cuyo módulo interviene en el cálculo de la integral se superficie de un campo escalar sobre S.

De ahora en más, $\vec{n}$ designará al vector *normal unitario* en un punto de S y diremos que S es *orientable* si se distinguen en ella dos caras, identificadas,cada una de ellas, con una de las dos elecciones posibles de $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|} \quad o \quad \vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}$$

Consideremos por ejemplo $S : x^2 + y^2 = 4$. Ubicados en un punto P de S, tiene sentido hablar de *normal hacia el exterior* y de *normal hacia el interior*. Elegido $\vec{n}$ hacia el exterior, podríamos desplazarlo continuamente a lo largo de cualquier trayectoria sobre S y regresar a P apuntando siempre hacia afuera.

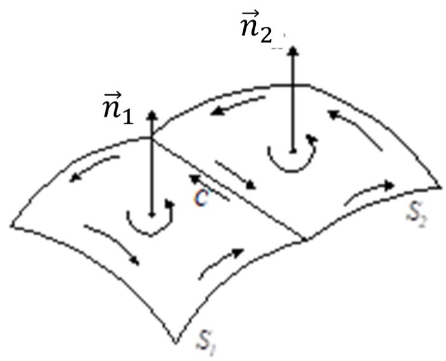


La superficie del ejemplo, al igual que todas las que tratamos en este curso, es orientable, pero existen superficies que no lo son.

Un ejemplo de superficie no orientable es la que se conoce como *cinta de Moëbius*, que tiene una sola cara:

Cuando, dada una superficie orientable S, se ha elegido una de las dos posibilidades para $\vec{n}$, se dice que se ha *orientado* a S.

Si S_1 y S_2 son orientables y $S = S_1 \cup S_2$ como en la figura siguiente, S queda orientada cuando se eligen en S_1 y S_2 vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ que inducen (de acuerdo a la regla de la mano derecha) orientaciones contrarias en la curva intersección.



Integral de Flujo

Sean S una superficie acotada y orientable, $\vec{n}$ el vector normal unitario elegido en S y $\vec{F}$ un campo vectorial con componentes continuas sobre S.
Llamamos *integral de flujo* (o, simplemente, *flujo*) *del campo vectorial* $\vec{F}$ *a través de la superficie* S, *en la dirección de* $\vec{n}$, a la integral de superficie del campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$ sobre S :

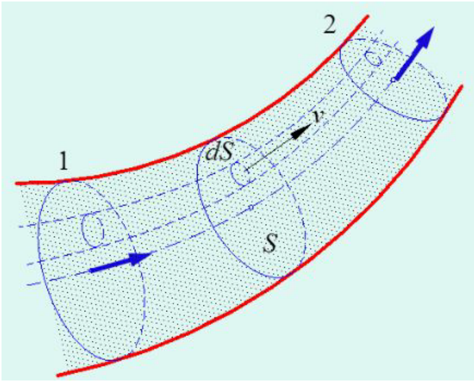
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Las integrales de flujo tienen aplicación en diversas áreas de la física y de la ingeniería. Por ejemplo:

- Si el campo vectorial modela el campo de velocidades de un fluido $\vec{V}$ por una cañería o tubería, la integral de flujo

$$Q = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

calcula el volumen de fluido que circula por unidad de tiempo a través de la superficie S. Q es el *caudal volumétrico*.



Si el fluido tiene densidad $\rho(x, y, z)$ la integral de flujo

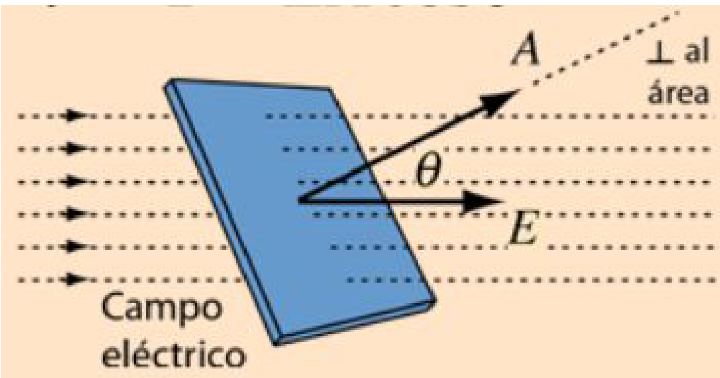
$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\vec{V} \cdot \vec{n}\, dS$$

calcula el *caudal másico* m, cantidad de masa de fluido que atraviesa la superficie S en la dirección normal $\vec{n}$ por unidad de tiempo.

- Si el campo vectorial modela un campo eléctrico $\vec{E}$, la integral de flujo

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

mide el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie. Es una forma de describir la intensidad del campo eléctrico producida por una carga.



7.4.1. Cálculo de la integral de flujo

Si $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in R$ y $\vec{n} = \dfrac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$ es el normal unitario elegido en S,

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right)(r(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dA =$$

$$= \iint_R \vec{F}(r(u,v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dA =$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \vec{F}(r(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) dA}$$

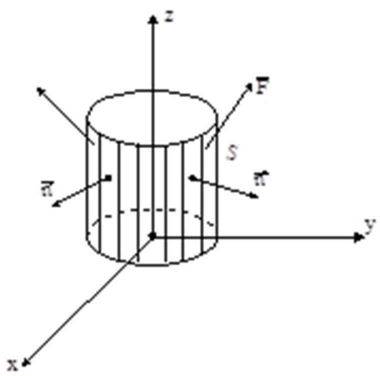
Cuando la superficie es gráfica de una función, por ejemplo:
$S : z = f(x,y)$ con $(x,y) \in R$, usamos como siempre la representación trivial: $S : \vec{r} = \vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle$, $(x,y) \in R$, con la que hemos visto que $\vec{N} = \left\langle -\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right\rangle$ o su opuesto.
De modo que,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \left\langle -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right\rangle dA$$

(si el normal elegido en S es el que tiene tercera componente positiva)

Ejemplos

- Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ a través de $S : x^2 + y^2 = 4$ limitada por $z = 0$ y $z = 4$, con $\vec{n}$ exterior.



$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = 2\cos u\,\vec{i} + 2\,\text{sen}\,u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$ *con* $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 4$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\,senu & 2\,cosu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\;\cos u\,\vec{i} + 2\;\text{sen}\,u\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

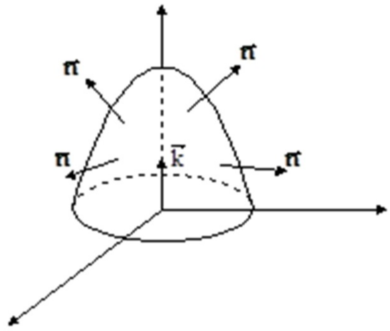
(vean que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ apunta hacia el ″exterior″ de S)

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = 2\;\cos u\,\vec{i} + 2\;\text{sen}\,u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = 4\;cos^2 u + 4\;sen^2 u = 4$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\;dS = \iint_{R_{uv}} 4\;dA = 4\;área(R_{uv}) = 32\pi$$

- Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ a través de $S : z = 4 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$ con $\vec{n}$ exterior.



$$S : z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \ , \ (x, y) \in R \ \ R = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\vec{N} = \langle 2x, 2y, 1\rangle$$

$$\vec{F}(x, y, f(x, y)) = \left\langle x, y, 4 - x^2 - y^2 \right\rangle$$

$$\vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{N} = 4 + x^2 + y^2$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \left(4 + x^2 + y^2\right)\, dA$$

y el cálculo de la integral doble se puede completar con un cambio de variables usando coordenadas polares:

$$\iint_R \left(4 + x^2 + y^2\right)\, dA = \iint_{R_{r\theta}} f(r, \theta)\, |J|\, dA_{r\theta} =$$

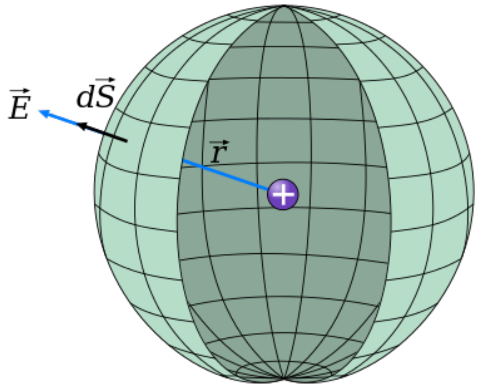
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4 + r^2\right) r\, dr\, d\theta = 24\pi$$

Notación:

- Una notación alternativa $\iint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)\, dS$ suele utilizarse para denotar la integral de flujo $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$ donde $\vec{F} = \langle P, Q, R\rangle$.
- Cuando la superficie es cerrada, por ejemplo una esfera, o unión de superficies que encierran un sólido, la integral de superficie suele anotarse de la siguiente forma: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

7.4.2. Flujo de un campo vectorial radial a través de una esfera

Este caso es de importancia en la física. Supongamos que se tiene un campo vectorial radial, llamémoslo en este caso $\vec{E}$, definido sobre una superficie esférica S de radio a centrada en el origen de coordenadas. En este caso, al ser radial, sobre la esfera el campo tiene la misma dirección al vector normal $\vec{n}$ en todos los puntos de S.



El flujo del campo fuera de S es:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

Siendo que el campo es radial (paralelo al normal en todo punto sobre S) resulta:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{\eta}| \cdot cos(\theta) = \left|\vec{E}\right|$$

Además, por ser el campo radial, el módulo del campo sobre la esfera sólo depende de la distancia al origen (r), en este caso a.

Llamando: $|\vec{E}| = E$, donde E es la magnitud del campo, en este caso constante que sólo depende de a, radio de la esfera.

Entonces:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E\ (\vec{n} \cdot \vec{n}) = E$$

Finalmente resulta que el flujo es:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S EdS = E.Area(S) = E4\pi a^2$$

Esta última igualdad también suele anotarse de la forma siguiente, en la que se expresa la magnitud del campo en función del flujo a través de la esfera de radio a:

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi a^2}$$

Este resultado es de mucha utilidad en Física, en especial en Electromagnetismo, para determinar la magnitud del campo eléctrico conociendo el valor del flujo.

Ejercicio:

Aplicar lo anterior para calcular el flujo del campo $\vec{E} = \langle x, y, z\rangle$ hacia afuera de la superficie esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

7.4.3. Ejercicios

1. Calculen la integral de flujo $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ en los siguientes casos:

   a) $\vec{F} = \langle xz, yz, x^2\rangle$; $S : x^2 + y^2 = 9$ limitado por $z = 0$ y $z = 4$ y $\vec{n}$ exterior.

   b) $\vec{F} = \langle x, y, z\rangle$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, usando la representación $r = r(u, v) = \langle u + v, u - v, 1 - 2u\rangle$ del plano y $\vec{n}$ con tercera componente positiva.

   c) $\vec{F} = \langle x, y, z\rangle$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, usando una representación explícita para el plano, $\vec{n}$ con tercera componente negativa.

   d) $\vec{F} = \langle y, -x, 1\rangle$; $S : z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 4$, $\vec{n}$ con tercera componente negativa.

   e) $\vec{F} = \langle y, -x, z\rangle$; $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $z = 3$, $\vec{n}$ con tercera componente negativa.

   f) $\vec{F} = \langle 0, 1, y\rangle$; $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $x^2 + y^2 \leq 4$, $\vec{n}$ con tercera componente negativa.

   g) $\vec{F} = \langle y, zy, 1\rangle$; $S : 3x + 6y + 3z = 6$, con $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $\vec{n}$ con primera componente positiva.

h) $\vec{F} = \langle y, 0, 2\rangle$; S : frontera del sólido

$$V = \left\{(x, y, z)/ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8-x^2-y^2}\right\}$$

2. Siendo $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $\vec{n}$ exterior, calculen

$$\iint_S \Big(xz\ cos\alpha + yz\ cos\beta + x^2\ cos\gamma\Big)\, dS$$

.

3. Suponiendo que $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - (2x + y)\vec{j} + z\vec{k}$ es la densidad de flujo de un fluido

   i) calculen la masa de ese fluido que atraviesa el hemisferio $S : z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ en la dirección del vector normal con tercera componente positiva, por unidad de tiempo

   ii) calculen la masa de ese fluido que atraviesa la frontera del sólido

   $V = \left\{(x, y, z)/0 \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$

   con dirección hacia el exterior, por unidad de tiempo.

4. Sea $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ y sea $S : x + y + z = 1$, limitado por los planos coordenados, en el primer octante y $\vec{n}$ con tercera componente positiva. Verifiquen que:

   a) Si C es la curva frontera de S con la orientación inducida por $\vec{n}$ de acuerdo a la regla de la mano derecha, resulta:
   $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$

   b) Si V es el sólido limitado por S y por los planos coordenados en el primer octante y $\tilde{S}$ es la frontera de V, con $\vec{n}$ exterior resulta:
   $\iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iiint_V div\vec{F}\ dV$

7.5. Teorema de Stokes o del rotor

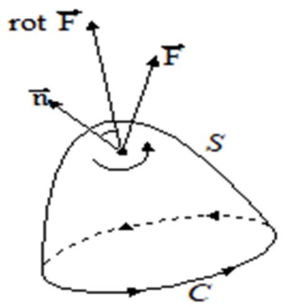
George Gabriel Stokes (1819-1903) fue un matemático y físico irlandés que realizó importantes contribuciones a la física teórica y a la teoría de series.

El teorema de Stokes es la versión en el espacio tridimensional del teorema de Green, que relaciona la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial con la circulación alrededor de la frontera de esa superficie.

Teorema de Stokes o del rotor

Sea S una superficie orientable en la que se ha elegido el vector normal $\vec{n}$ y cuya frontera es la curva cerrada C orientada con la orientación inducida por $\vec{n}$ de acuerdo a la regla de la mano derecha. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un dominio abierto D que contiene a C y a S, entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$



Importante:

(1) Una consecuencia inmediata del teorema de Stokes es que, para S_1 **y** S_2 **dos superficies orientables, con frontera común** C, ambas con orientación concordante con la de C, y $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un dominio abierto D que contiene a C y a S_1 y a S_2, entonces:

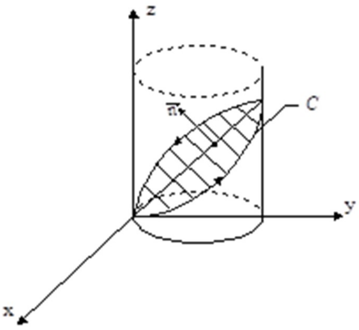
$$\iint_{S_1} rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

(2) **El flujo de un campo rotor, no depende de la superficie que atraviesa, sino de su frontera.** Nos permite además concluir que para evaluar una circulación aplicando la igualdad de Stokes, es suficiente con elegir la superficie más simple, que obviamente es un plano, si se trata de una curva plana.

7.5.1. Aplicaciones del teorema de Stokes

1. **Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ mediante una integral de flujo.**

   - **Ejemplo:** Siendo $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ y = z \end{cases}$ con orientación antihoraria vista desde z^+, calcular $\displaystyle\oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x+z)dz$ aplicando el teorema de Stokes.



Observemos primeramente que en este caso, las componentes del campo vectorial $\vec{F} = \langle z-y, x-z, x+z \rangle$ tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$. Para aplicar el teorema de Stokes es necesario definir una superficie orientable S que tenga a la curva C como frontera y elegir en S el vector normal de forma tal que sea concordante con la orientación de C. Existen múltiples elecciones posibles para S. Elegiremos la más sencilla: porción de plano $y = z$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$

Sea entonces $S : z = f(x, y) = y$ con $(x, y) \in R$,

$$R = \left\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 2y\right\}$$

$$\vec{N} = \langle 0, -1, 1 \rangle \quad (\textit{concordante con la orientación dada para } C)$$

S así definida es orientable, tiene a la curva cerrada C como frontera, S y C están orientadas de manera concordante de acuerdo a la regla de la mano derecha, S y C están incluidas en el conjunto en el que las componentes del campo vectorial $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas. Por el teorema de Stokes, la circulación de ese campo vectorial $\vec{F}$ es igual a $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.
Calculamos a continuación esa integral de flujo:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x+z \end{vmatrix} = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$rot\vec{F}(x, y, y) = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$rot\vec{F}(x, y, y) \cdot \vec{N} = \langle 1, 0, 2 \rangle \cdot \langle 0, -1, 1 \rangle = 2$$

$$\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R 2\, dA = 2\ \acute{a}rea(R) = 2\pi$$

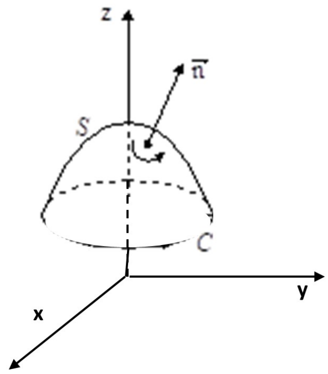
.

$$\therefore \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

.

2. **Evaluar** $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ **mediante una circulación.**

- **Ejemplo:** Siendo $\vec{F} = \langle y^2, xy, xz \rangle$, $S : z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ con $z \geq 1$ y $\vec{n}$ con tercera componente no negativa, calcular $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ aplicando el teorema de Stokes.



S es una superficie orientable cuya frontera es la curva cerrada $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ (circunferencia en el plano $z = 1$ que consideramos con la orientación inducida por $\vec{n}$).

Las componentes de $\vec{F} = \langle y^2, xy, xz \rangle$ tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$. C y S están incluidas en ese conjunto.
Por el teorema de Stokes, se tiene entonces que la integral de flujo

del rotor de $\vec{F}$ a través de S y en la dirección de $\vec{n}$ es igual a $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Calcularemos entonces esa integral de línea:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle cos\ t, sen\ t, 1\rangle \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left\langle sen^2 t, cos\ t\ sen\ t, cos\ t\right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -sen\ t, cos\ t, 0\rangle$$

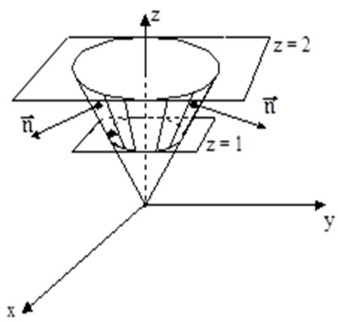
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = -sen^3 t + cos^2 tsent$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-sen^3 t + cos^2 tsent)dt = \int_0^{2\pi} (-sent + 2cos^2 t\ sent)dt = 0$$

$$\therefore \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = 0$$

Aplicación del teorema de Stokes al caso de una superficie con dos curvas cerradas como frontera

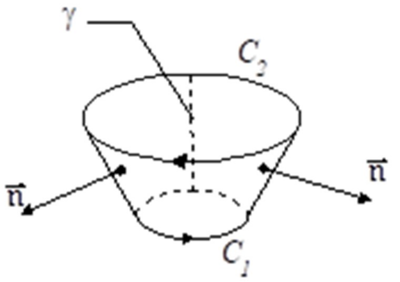
Ejemplo: Sea $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $z = 1$ y $z = 2$, con $\vec{n}$ exterior y $\vec{F} = \langle -z, -x, y\rangle$.



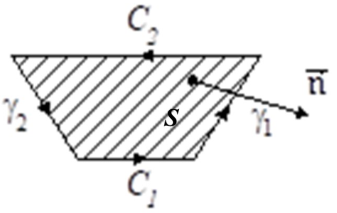
La frontera de S está formada en este caso por

$$C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad C_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideremos esas curvas orientadas como se muestra en la figura siguiente (vistas desde z^+, C_1 con orientación antihoraria y C_2 horaria) e imaginemos un corte en la superficie, a lo largo de una curva auxiliar γ.



Podemos pensar ahora que la curva frontera de la superficie es la curva cerrada $C : C_1 \cup \gamma \cup C_2 \cup (-\gamma)$



Entonces, por el teorema de Stokes:

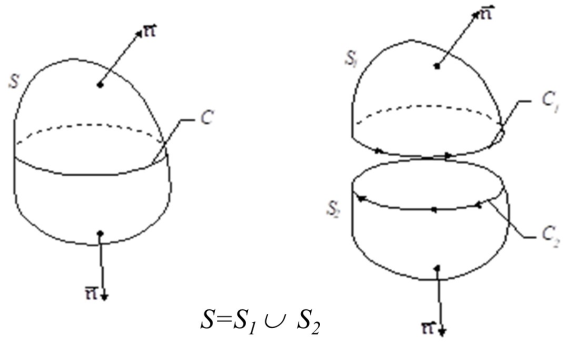
$$\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Calculen ustedes las dos integrales de línea para obtener así el valor del flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S.

Caso de una superficie cerrada

Consideremos ahora el caso de una superficie S cerrada con normal exterior. Podemos pensar a S como la unión de dos superficies como se ve en la figura:



Las curvas C_1 y C_2 coinciden con C pero una tiene orientación contraria a la otra (C_1 y C_2 están orientadas de manera concordante con los vectores normales de S_1 y S_2 respectivamente)

Importante Si $\vec{F}$ es un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ y S está incluida en ese conjunto, entonces: *"El flujo de un campo rotor a través de una superficie cerrada es nulo"*.

Pues:

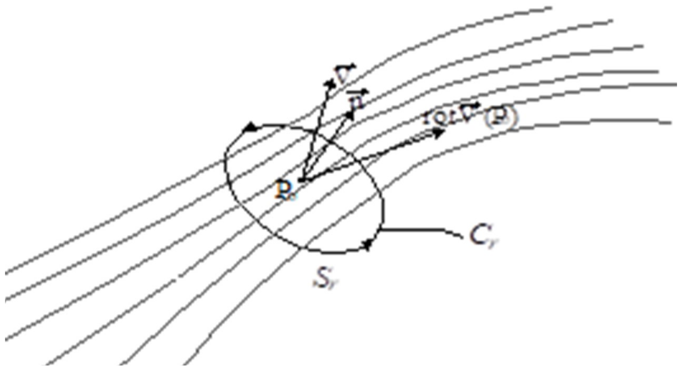
$$\iint_{S_1} rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_{S_2} rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \iint_{S} rot\vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_{S_1} rot\vec{F}\cdot\vec{n}\ dS + \iint_{S_2} rot\vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

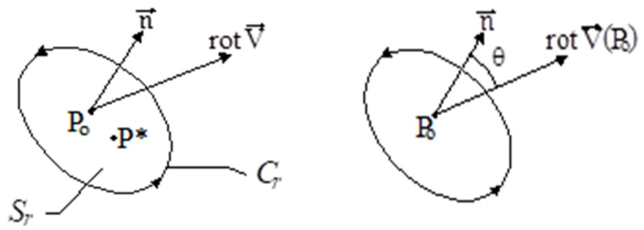
Interpretación del rotor en un punto

Supongamos que $\vec{V}(x, y, z)$ es el campo de velocidades de un fluido. Sea P_0 un punto en la corriente. Consideremos un círculo S_r con centro en P_0 y radio r y sea C_r la circunferencia frontera de ese círculo.



Aplicando la igualdad de Stokes se tiene: $\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} rot\vec{V} \cdot \vec{n}\, dS$ Para algún punto $P^* \in S_r$ es $\iint_{S_r} rot\vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = \left(rot\vec{V} \cdot \vec{n}\right)(P^*)área(S_r)$ (¿por qué?) y entonces $\dfrac{\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{área(S_r)} = \left(rot\vec{V} \cdot \vec{n}\right)(P^*)$

El primer miembro de la igualdad anterior representa un promedio entre la circulación del campo a lo largo de C_r y el área de la superficie limitada por C_r. Esos promedios varían con r. El límite de esos promedios cuando r tiende a cero se llama *densidad de circulación en* P_0. Si $r \to 0$ entonces $P^* \to P_0$ y resulta: $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{área(S_r) =} = \left(rot\vec{V} \cdot \vec{n}\right)(P_0) = \left|rot\vec{V}(P_0)\right| |\vec{n}|\, cos\theta$



La densidad de circulación será entonces máxima cuando el ángulo θ sea nulo y el valor máximo será $\left|rot\vec{V}(P_0)\right|$.

Por esta razón. al vector $rot\vec{V}$ se lo denomina **vector de vorticidad**. Es decir que el rotor de un campo vectorial en un punto P representa la tendencia de las partículas cercanas al punto P a rotar en torno al eje que apunta en la dirección del $rot\vec{V}(P)$. El vector $rot(\vec{V})$, apunta en la dirección en la cual el fluido gira más rápido, siendo el valor $|rot(\vec{V})|$ una medida de la rapidez de esta rotación. Para el caso en que $rot(\vec{V}) = \vec{0}$, el fludo se dice **irrotacional**, es decir que las partículas se desplazarán pero sin rotar.

7.5.2. Ejercicios

1. En los siguientes incisos evalúen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ aplicando el teorema de Stokes siempre que sea posible. (Elijan en cada caso la orientación de la curva e indíquenla en un gráfico.)

   a) $\vec{F} = \left\langle x^2 e^x - y,\ \sqrt{y^2+1}, z^3 \right\rangle \quad ; \quad C : \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$

   b) $\vec{F} = \langle x^2, y^4 - x, z^2 seny \rangle \quad ; \quad C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

   c) $\vec{F} = \left\langle 2x^2, 4y^2, e^{8z^2} \right\rangle \quad ; \quad C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - y \end{cases}$

   d) $\vec{F} = \langle cosx, seny, z \rangle \quad ; \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x - y \end{cases}$

   e) $\vec{F} = \langle x^2 + 2xy^3z, 3x^2y^2z - y, x^2y^3 \rangle \quad ; \quad C$: frontera del triángulo de vértices $(0,1,0)$, $(0,0,4)$ y $(2,0,0)$

   f) $\vec{F} = \langle -y, z, x \rangle \quad ; \quad C$: frontera del cuadrado de vértices $(0,2,2)$, $(2,2,2)$, $(2,2,0)$ y $(0,2,0)$

2. En los siguientes incisos, evalúen $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$ aplicando el teorema de Stokes siempre que sea posible.

   a) $\vec{F} = \langle zx, 2y^2, z^3 \rangle \quad ; \quad S : z = 4 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$; $\vec{n}$ con tercera componente positiva.

   b) $\vec{F} = \langle 2x - y, yz^2, y^2z \rangle \quad ; \quad S : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ limitada por $z = 0$; $\vec{n}$ con tercera componente positiva.

   c) $\vec{F} = \left\langle zx^2, ze^{xy^2} - x, xy^2 \right\rangle \quad ; \quad S : z = 1 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$;
   $\vec{n}$ con tercera componente positiva.

d) $\vec{F} = \left\langle xy, 4xe^{z^2} - x, zy + 1 \right\rangle$; $S : y = x^2 + z^2$ con $y \leq 2$; $\vec{n}$ hacia la izquierda.

e) $\vec{F} = \langle xyz, 4x^2y^3 - z, 8cosxz^2 \rangle$; S : superficie frontera del cubo $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ sin la cara que se encuentra en el plano $z = 0$; $\vec{n}$ hacia el exterior del cubo.

f) $\vec{F} = \langle zx, x^2 + y^2, z^2 - y^2 \rangle$; $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $\vec{n}$ con tercera componente negativa.

3. Sea f un campo escalar con derivadas parciales de segundo orden continuas en $\mathbb{R}^3$. Muestren que $\oint_C \left(f\ \vec{\nabla} f \right) \cdot d\vec{r} = 0$ para toda C cerrada.

4. Analizar en cada caso si es posible aplicar el Teorema de Stokes para calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ Hallar el valor de esa circulación.

   (i) $\vec{F} = \left\langle \dfrac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\rangle$

   (ii) $\vec{F} = \left\langle \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, z \right\rangle$

   Observación: en cada caso, hallar el dominio del campo, su rotor, y el conjunto en el cual tienen sus componentes con derivadas parciales continuas.

7.6. Teorema de Gauss o de la divergencia

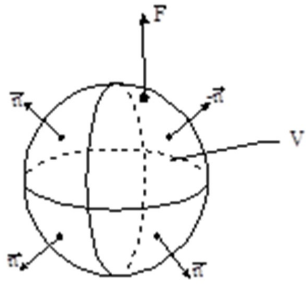
Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos. Riemann trabajo junto a Gauss y fue éste su director de tesis de doctorado.

El teorema de la divergencia es un resultado importante en la física y en ingeniería, particularmente en electrostática y en mecánica de fluidos. Vincula la integral de la divergencia dentro de un volumen con la integral superficial que encierra al volumen considerado. Intuitivamente enuncia que la suma de todas las fuentes de un campo en una región es igual al flujo de salida neto.

Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea S una superficie orientable y cerrada en la que se ha elegido $\vec{n}$ exterior y sea V el sólido limitado por S. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en $D \subset \mathbb{R}^3$, y S y V están incluidos en ese conjunto, entonces

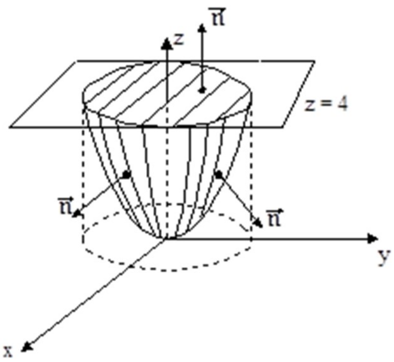
$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div(\vec{F})\, dV$$



7.6.1. Aplicaciones del teorema de Gauss

1. **Calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada mediante una integral triple.**

   - **Ejemplo** Calcular $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ siendo $\vec{F} = \langle x, y, z \rangle$ y S la frontera del sólido V limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$, con $\vec{n}$ exterior.



Como S es una superficie cerrada y orientable y $\vec{F}$ es un campo vectorial con componentes continuas en $D = \mathbb{R}^3$, se puede aplicar el teorema de Gauss para afirmar que

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div(\vec{F})\, dV$$

Calculamos a continuación la integral triple :

$$div(\vec{F}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 4\right\}$$

$$R = \left\{(x, y)/0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

$$\iiint_V div(\vec{F})\, dV = \iiint_V 3\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 3r dz dr d\theta = ... = 24\pi$$

Atención: Si la propuesta hubiera sido: *Calcular* $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$ *siendo* $\vec{F} = \langle x, y, z\rangle$ *y* $S : z = x^2 + y^2$ *limitada por* $z = 4$*, con* $\vec{n}$ *hacia el exterior del paraboloide*, el teorema de Gauss no podría aplicarse pues la superficie no es, en este caso, cerrada. La integral de flujo debe calcularse en este caso de manera directa. realicen ese cálculo y comprueben que el resultado es 8π. Deduzcan luego el valor del flujo a través de $\tilde{S} : z = 4$ limitada por $z = x^2 + y^2$

2. **Calcular el volumen de un sólido mediante una integral de flujo**

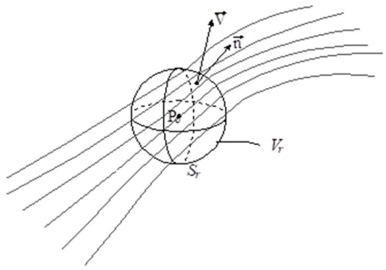
   Si $div\vec{F} = 1$ y las componentes de $\vec{F}$ tiene derivadas parciales continuas (como sucede, por ejemplo, con $\vec{F} = \left\langle \frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right\rangle$), por el teorema de Gauss se puede afirmar que, si S es cerrada y orientable , $\vec{n}$ es exterior a S y V es el sólido limitado por S ,

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div(\vec{F})\, dV = \iiint_V 1\, dV = volumen(V)$$

   O sea que el volumen del sólido V limitado por S puede hallarse resolviendo la integral de superficie: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

Interpretación de la divergencia

Recurrimos una vez más al campo de velocidades de un fluido, $\vec{V}(x, y, z)$. Consideremos, centrada en un punto P_0, una pequeña superficie esférica S_r de radio r, que limita a la esfera sólida V_r.



Según la igualdad del teorema de Gauss, con $\vec{n}$ exterior, se tiene:

$$\oiint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n}\; dS = \iiint_{V_r} div(\vec{V})\; dV$$

Para algún punto $P^* \in V_r$ es $\displaystyle\iiint_{V_r} div\vec{V} dV = div\vec{V}(P^*).vol(V_r)$ (¿por qué?)

y entonces $\quad \dfrac{\oiint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n}\; dS}{vol(V_r)} = div\vec{V}(P^*)$

El primer miembro de la igualdad anterior representa un promedio entre el flujo del campo a través de S_r en la dirección normal exterior y el volumen del sólido limitado por S_r y el límite de esos promedios cuando r tiende a cero es la divergencia de $\vec{V}$ en (P_0) :

$$div\vec{V}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\oiint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n}\; dS}{vol(V_r)}$$

Nota:

- La divergencia de un campo vectorial mide la razón neta de cambio de la masa del fluido que fluye desde un punto por unidad de volumen. En otras palabras la divergencia mide la tendencia de un fluido a divergir desde un punto.
- Si el campo tiene fuentes o sumideros, la divergencia de dicho campo será diferente de cero.
- Si la $div(\vec{F}(P)) = 0$, el flujo neto en P es nulo. En este caso el campo vectorial se llama *solenoidal*, y el *flujo se dice incompresible.* La cantidad de lineas de flujo entrantes, es igual a las salientes.

- Si $div(\vec{F}(P)) > 0$ la cantidad de flujo que sale en P es mayor a la que entra (existen fuentes). Se dice que en P hay una *fuente* o un manantial.
- Si $div(\vec{F}(P)) < 0$ la cantidad de flujo que sale en P es menor a la que entra. En P hay un *sumidero*.

7.6.2. Ejercicios

1. En los siguientes incisos, calculen el flujo hacia el exterior de $\vec{F}$ a través de la superficie frontera del sólido V aplicando el teorema de Gauss siempre que sea posible.

   a) $\vec{F} = \langle (y-x), (z-y), (y-x) \rangle$; $V = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$

   b) $\vec{F} = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$; $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

   c) $\vec{F} = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$; V limitado por $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ y $z = 1$.

   d) $\vec{F} = \langle x^2, xz, 3z \rangle$; $V = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

   e) $\vec{F} = \langle x, y, z \rangle$; V limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

2. Demuestren que el flujo hacia el exterior de un campo vectorial constante, a través de cualquier superficie cerrada y orientable S, es igual a cero.

3. Usen el teorema de Gauss para mostrar que $\oiint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 0$ para toda S cerrada, si el campo tiene componentes con derivadas parciales segundas continuas en un dominio que contiene a S.

4. Sea $V = \{(x,y,z)/4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ y sea $\vec{F} = (x,y,z)$ con normal exterior. Verificar en este caso la igualdad del teorema de Gauss.

5. Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades: $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $0 \leq z \leq 1$, encuentren aquel para el cual, el flujo a través de su frontera y hacia el exterior del campo vectorial $\vec{F} = \langle -x^2 - 4xy, -6yz, 12z \rangle$ sea máximo. (Nota: recordar que los posibles puntos críticos de una función de varias variables son los que hacen cero las derivadas parciales de esa función).

6. Aplicar el teorema de Gauss a un campo gradiente, es decir a un campo $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ y obtener resultados para el caso en que f es armónica, esto es que el *laplaciano* es cero (f es armónica): $\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

7. Comprobar el teorema de Gauss para un cubo $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ y el campo: (i) $\vec{F} = \langle x, y, z\rangle$ (ii) $\vec{F} = \langle 2, 3, 4\rangle$

8. Obtengan el volumen de una esfera de radio a por medio de una integral de flujo.

9. (i) Calculen el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$; $z = 4$ y $z = 9$. (ii) Evalúen el flujo del campo vectorial $\vec{F} = \langle 2x, 2y, -2z\rangle$ a través de la frontera del sólido de la parte con dirección normal exterior. (iii) Calculen también el flujo de dicho campo sólo a través de la porción del paraboloide (usar de ser posible los datos hallados en los incisos anteriores).

7.7. Aplicaciones del Cálculo Vectorial a la física

7.7.1. Ley de Gauss

El Teorema de la divergencia, que relaciona la divergencia de un campo vectorial con el valor de la integral de superficie del flujo definido por este campo, es un resultado importante en física, sobre todo en electrostática y en dinámica de fluidos. Además, el teorema de Gauss puede utilizarse en diferentes problemas de física gobernados por leyes inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, como la gravitación o la intensidad de la radiación, en estos casos se establece unaley relacionada al teorema que recibe el nombre de **Ley de Gauss** y que constituye también la primera de las **ecuaciones de Maxwell**.

James Clerk Maxwell (1831 – 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "segunda gran unificación en física", después de la primera llevada a cabo por Newton. Fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX.

En física y en análisis matemático, la Ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga el éctrica encerrada en esta superficie. De esta misma forma, también relaciona la Divergencia del campo eléctrico con la densidad de carga.

Estos temas se estudiarán básicamente en Física II.

La ley de Gauss tiene la siguiente interpretación física. El potencial debido a una carga puntual Q en $(0,0,0)$ está dado por:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi \sqrt[2]{x^2+y^2+z^2}}$$

y el campo eléctrico correspondiente es:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{r}{r^3}\right)$$

siendo $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, es decir que

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}\right).$$

Para una distribución continua de carga descripta por medio de una densidad de carga ρ, el campo $\vec{E}$ está relacionado con la densidad ρ mediante:

$$div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \rho.$$

Así por el teorema de Gauss,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot dS = \iiint_V \rho dV = Q$$

el flujo hacia afuera de una superficie es igual a la **carga total dentro**.

La ley de Gauss puede ser utilizada para demostrar que no existe campo eléctrico dentro de una jaula de Faraday sin cargas eléctricas en su interior. La ley de Gauss es la equivalente electrostática a la ley de Ampére, que es una ley de magnetismo. Ambas ecuaciones fueron posteriormente integradas en las ecuaciones de Maxwell. Esta ley puede interpretarse, en electrostática, entendiendo el flujo como una medida del número de líneas de campo que atraviesan la superficie en cuestión. Para una carga puntual este número es constante si la carga está contenida por la superficie y es nulo si esta fuera (ya que hay el mismo número de líneas que entran como que salen). Además, al ser la densidad de líneas proporcionales a la magnitud de la carga, resulta que este flujo es proporcional a la carga, si está encerrada, o nulo, si no lo está. Cuando tenemos una distribución de cargas, por el principio de superposición, sólo tendremos que considerar las cargas interiores, resultando la ley de Gauss. Sin embargo, aunque esta ley se deduce de la ley de Coulomb, es más general que ella, ya que se trata de una ley universal, válida en situaciones no electrostáticas en las que la ley de Coulomb no es aplicable.

7.7.2. Flujo para una superficie esférica con una carga puntual en su interior

Considérese una superficie esférica de radio r con una carga puntual q en su centro. El campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo al vector superficie $\vec{dS}$, y el campo es constante en todos los puntos de la superficie esférica. En consecuencia:

$$\Phi_E = \iint_S E \cdot dS = \iint_S E.\cos\theta dS = \int_S E\cos(0)dS = E\iint_S dS = E4\pi r^2$$

7.7.3. Forma integral de la Ley de Gauss

Su forma integral utilizada en el caso de una distribución extensa de carga puede escribirse de la manera siguiente:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o}\iiint_V \rho\ dV = \frac{Q_A}{\epsilon_o}$$

donde Φ es el flujo eléctrico, E es el campo eléctrico, dS es un elemento diferencial del área A sobre la cual se realiza la integral, Q es la carga total encerrada dentro del área A, ρ es la densidad de carga en un punto de V.

7.7.4. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Tomando la ley de Gauss en forma integral.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o}\iiint_V \rho\ dV$$

Aplicando al primer término el teorema Gauss queda

$$\oiint_S (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})dV = \frac{1}{\epsilon_o}\int\int\int_V \rho\ dV$$

Como ambos lados de la igualdad poseen diferenciales volumétricas, y esta expresión debe ser cierta para cualquier volumen, solo puede ser que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

La ley de Gauss es realmente útil para resolver problemas complejos de manera relativamente sencilla.

7.7.5. Ley de Gauss para el campo magnético

Al igual que para el campo eléctrico, existe una ley de Gauss para el campo magnético, que se expresa en sus formas integral y diferencial:

$$\oiint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Esta ley expresa la inexistencia de cargas magnéticas o, como se conocen habitualmente, monopolos magnéticos. Las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras en el sentido de que posee un polo norte y un polo sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo. En el hipotético caso de que se descubriera experimentalmente la existencia de monopolos, esta ley debería ser modificada para acomodar las correspondientes densidades de carga, resultando una ley en todo análoga a la ley de Gauss para el campo eléctrico. La Ley de Gauss para el campo magnético sería:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$$

donde ρ_m densidad de corriente J_m, la cual obliga a modificar la ley de Faraday.

7.7.6. Ley de Coulomb

El teorema de Gauss aplicado al campo eléctrico creado por una carga puntual es equivalente a la ley de Coulomb de la interacción electrostática.

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La ley de Coulomb también se puede deducir a través de Ley de Gauss.

Capítulo 8

Anexo

8.1. Tabla de integrales

$\int dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$
$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\lvert x+a\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u+a} dx = \ln\lvert u+a\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\text{cotan}\ x + C$	$\int \frac{u'}{sen^2 u} dx = -\text{cotan}\ u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}\ x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \text{arcsen}\ u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

Integral de la suma o resta	$\int (u \pm v) dx = \int udx \pm \int vdx$
Integración por partes	$\int udv = uv - \int vdu$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x) dx = F(x)\rvert_a^b = F(b) - F(a)$

Siendo: ***u*, *v*** funciones de ***x***; ***a*, *k*, *n*, *C*** constantes.

8.2. Identidades trigonométricas

$\operatorname{tg}\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta},\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},\ \theta \neq \pi k \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}$

$sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},\ \theta \neq \pi k, \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$

$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec\theta = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$sen(\theta) = sen(\theta + 2\pi) \qquad \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi) \qquad \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\theta + \pi)$

$sen(-\theta) = sen(\theta + \pi) \qquad \cos(-\theta) = -\cos(\theta + \pi)$

$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}(\theta) \qquad \cot(-\theta) = -\cot(x)$

$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \pm \operatorname{tg}(\beta)}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$

$sen(\pi \pm \theta) = \mp sen(\theta)$

$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$

$\operatorname{tg}(\pi \pm \theta) = \pm\operatorname{tg}(\theta)$

$\csc(\pi \pm \theta) = \mp\csc(\theta)$

Fórmulas del ángulo doble

$sen(2\theta) = 2sen\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2sen^2\theta$

$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$

Fórmulas de reducción de potencias

$sen^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

Teorema del coseno

Dado un triángulo ABC, de lados a, b, c y siendo γ el ángulo opuesto al lado c, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Teorema del seno

En todo triángulo se da la siguiente relación entre la longitud de sus lados a, b y c y el seno de sus respectivos ángulos opuestos A, B y C:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

8.3. Resumen de algunos resultados

- Área de una superficie esférica de radio $r : A = 4\pi r^2$
- Volumen de una esfera de radio $r : V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Área superficial de un cilindro: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
- Volumen de un cilindro de base circular de radio r y altura h: $V = \pi r^2 h$
- Diferencial de volumen en coordenadas esféricas:

  $$dV = 4\pi r^2 dr$$

  Pues para una esfera de radio variable se tiene que

  $$\int\int\int_D dV = \int_a^b r^2 (\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen(\varphi) d\varphi d\theta) dr = \int_a^b r^2 4\pi dr$$

- Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas:

  $$dV = 2\pi hrdr$$

  Pues para un cilindro circular de altura h y radio variable se tiene que:

  $$\int\int\int_D dV = \int_a^b r(\int_0^{2\pi}\int_0^{h} dzd\theta)dr = \int_a^b 2\pi hrdr$$

Resultados del Teorema de Gauss

Sean: S una superficie que encierra a V Sólido, $\vec{\eta}$ normal exterior a S, $\vec{F}$ campo con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto que contiene a S.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{\eta} dS = \iiint_V div(\vec{F}) dV$$

Según sea el campo el resultado del teorema de Gauss es el siguiente:

- Si $\vec{F} = \vec{a}$ entonces $\oiint_S \vec{a}\vec{\eta} dS = \iiint_V \ div(\vec{a}) dV = 0$
- Si el campo es un campo rotor $rot(\vec{G})$ entonces $\iint_S rot(\vec{G})\vec{\eta} dS = \iiint_V \ div(rot(\vec{G})) dV = 0$
- Si $\vec{F}$ es con $div(\vec{F}) = 1$ entonces $\oiint_S \vec{F}\vec{\eta} dS = \iiint_V dV = Vol(V)$
- Si el campo es un campo gradiente $\vec{\nabla} f$ y si f es armónica, $\iint_S \vec{\nabla} f.\vec{\eta} dS = \iiint_V div(\vec{\nabla} f) dV = \iiint_V \Delta f dV = 0$

"*La divergencia de un campo puede considerarse como la medida de las* ***fuentes*** *escalares del mismo*".

Resultados del Teorema de Stokes

Sean: C curva cerrada con borde superficie S, $\vec{F}$ campo con componentes con derivadas continuas en un abierto que contiene a S.

$$\iint_S rot(\vec{F}).\vec{\eta} dS = \oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

Valen las siguientes igualdades:

- Si el campo es $\vec{a}$ (constante), $\iint_S rot(\vec{a})\vec{\eta} dS = 0$
- Si S es cerrada, $\iint_S rot(\vec{F})\vec{\eta} dS = 0$
- Si el campo es $\vec{\nabla} f$, $\iint_S rot(\vec{\nabla} f)\vec{\eta} dS = 0$

Cuadro sinóptico de campos escalares y vectoriales en $\Re^2$ y $\Re^3$

Conceptos matemáticos	Conceptos físicos	Expresiones matemáticas	Operaciones	Estudio de la variación	Integrales que involucran
Campo escalar **o** **Función escalar**	Masa temperatura densidad volumen área energía presión carga flujo magnético potencial	Es una función a valores reales A cada punto del plano (x,y) se le asigna un escalar $f(x,y)$ Idem a (x,y,z) se le asigna un escalar $f(x,y,z) = w$	Suma Resta Producto	Gradiente $\vec{\nabla} f$ Diferencial df	$\int_C f\, dS$ $\iint_R f\, dA$ $\iiint_V f\, dV$ $\iint_S f\, dS$
Campo vectorial	Campo eléctrico Campo magnético Campo gravitatorio Campo de velocidades de un fluido Campo de fuerzas	Es una función vectorial $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ A cada punto (x,y) se le asigna un vector $\vec{F}(x,y)$ Idem a (x,y,z) se le asigna un vector $\vec{F}(x,y,z)$	Suma Resta Producto por función escalar Producto escalar Producto vectorial	Rotor (vector) $rot\,(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ Divergencia (escalar) $div(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

Capítulo 9

Respuestas de ejercicios

Ejercicios de la sección 1.4.1

- Ejercicio 2 : i) $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{31}{6}$ ii) $\dfrac{10}{3}$ y $\dfrac{155}{6}$
- Ejercicio 3 : i) $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 10$ ii) Sí, $g'(x) = f(x) = 3x + 2$
- Ejercicio 4 : i) $g(-2) = 0$, $g(0) = 4$, $g(1) = 7$, $g(2) = 9$
  ii) $g(x) = \begin{cases} 2x + 4 \; si \; -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2x + 4 \; si \; 0 < x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x + 1 \; si \; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ iii) Sí, $g'(x) = f(x) = \begin{cases} 2 \; si \; -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2 \; si \; 0 < x \leq 1 \\ -4x + 8 \; si \; 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Ejercicios de la sección 1.6.2

- Ejercicio 2 : i)V ii) V , V , F
- Ejercicio 3 : a) $\frac{10}{3}$ b) $e - 1$ c) 1 d) $\frac{5}{2}$ e) -12 f) -1 g)$\frac{1}{2}$ h)-3 i)$\frac{2}{3}$ j)3 k) $\operatorname{tg} t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1$ l) $\operatorname{arc\,tg} x \Big|_{-1}^{1} = \dfrac{\pi}{2}$ m) $\operatorname{arc\,sen} x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{3}$ n) $\dfrac{81}{4}$ o) 4
- Ejercicio 4 : i) $\dfrac{2}{\pi}$ ii)$\dfrac{38}{15}$ iii)$\dfrac{\ln 4}{3}$ iv) 0

- Ejercicio 5 : i) Sí, pues $f(x)$ es continua en $[-1,2]$ por ser polinómica. $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$

- Ejercicio 6 : i) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - 4 & si \ -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{19}{4} + x & si \ 1 < x \leq 3 \end{cases}$

  ii) $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & si \ 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6} & si \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

  iii) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si \ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & si \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

- Ejercicio 7 : i) $F'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ ii) $G'(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+1}}\, 2x$

- Ejercicio 8: i) $y = -3x + 5$ ii) $y = -2x + 1$

- Ejercicio 9: Derivando en ambos miembros (luego de verificar las hipótesis del TFC) y despejando $f(x)$, se obtiene: $f(x) = e^{2x}(1+2x)\left(1+e^{-x}\right)^{-1}$

- Ejercicio 10: f es derivable y por lo tanto es continua, por lo que puede aplicarse el TFC para afirmar que $h'(x) = f(x)$ y entonces:
  i) Verdadero ($h'(x) = f(x)$ y $h''(x) = f'(x)$) ii) Verdadero (porque son derivables tal como se vio en el ítem i)) iii) Verdadero ($h'(1) = f(1) = 0$)
  iv) Verdadero (h' es estrictamente decreciente y continua y $h'(1) = 0$ entonces h' es positiva a la izquierda del 1 y negativa a la derecha del 1 entonces h es estrictamente creciente a la izquierda del 1 y estrictamente decreciente a la derecha del 1, así que tiene en $x = 1$ un máximo local) v)Falso (por lo dicho en iv)) vi) Falso ($h''(x) = f'(x) < 0$, entonces la gráfica de h es cóncava hacia abajo) vii) Verdadero ($h'(1) = f(1) = 0$)

Ejercicios de la sección 1.7.4

- Ejercicio 1: i) $\dfrac{1}{12}$ ii) $\dfrac{44}{15}$ iii) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{4}$ iv) $\dfrac{9}{2}$ v) 9 vi) $\dfrac{1}{3}$

- Ejercicio 3: $m > 0$ y el área es $\dfrac{m^2}{2}$

- Ejercicio 4: $\dfrac{37}{4}$

Ejercicios de la sección 1.7.5

- Ejercicio 1: i) $\dfrac{256}{15}\pi \approx 53,62$ ii) 8π
- Ejercicio 2: a) $\dfrac{8}{5}\pi$ b) $\dfrac{2}{15}\pi$ c) $\dfrac{\pi}{5}$ d) $\dfrac{\pi}{2}$
- Ejercicio 3: i) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{27}} \pi\, 3^2\,dy + \int_{\frac{1}{27}}^1 \pi y^{-\frac{2}{3}}\,dy - \int_0^1 \pi\,dy$
  iii) $\displaystyle\int_1^3 \pi\, \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2 dx - \int_1^3 \pi\,dx$

Ejercicios de la sección 1.7.6

- Ejercicio 2: $\dfrac{112}{3}$
- Ejercicio 3: $20\left(e-\dfrac{1}{e}\right) \approx 47\ m$

Ejercicios de la sección 1.9.1

- Actividad: ii) $\operatorname{arc\,sen} x + C$ iii) $\operatorname{arc\,tg} x + C$ viii) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

Ejercicios de la sección 1.10.1

- Ejercicio 1: iii) $\dfrac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C$ ix) $-\cos\sqrt{x^2+4} + C$ xv) $\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$ xvii) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
- Ejercicio 2: i) Con la sustitución $u = \ln x$, resulta: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{\ln 2} u\,du =$
  $= \left.\dfrac{u^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \dfrac{\ln^2 2}{2}$ iii) Con la sustitución $u = x^2+1$, resulta: $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^5 = \frac{\ln 5}{2}$

Ejercicios de la sección 1.11.1

- Ejercicio 1: iv) Considerando $u = \ln x$ y $dv = dx$, resulta $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$ entonces: $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C$
- Ejercicio 2: a) $6 \ln 6 - 5 \approx 5,75$ b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{1}{2} \approx 0,41$
- Ejercicio 3: $\int_1^5 \pi \ln^2 x \, dx = \pi \left(5 \ln^2 5 - 10 \ln 5 + 8\right) \approx 15,26$

Ejercicios de la sección 1.12.1

- Ejercicio 1: $\int_0^\pi \pi \left(x + \operatorname{sen} x\right)^2 \, dx = \frac{\pi^4}{3} + 5\frac{\pi^2}{2} \approx 57,14$
- Ejercicio 4: 12π
- Ejercicio 5: ii) Con la sustitución $x = \cosh u$, con $u \geq 0$, resulta: $\int_1^4 \sqrt{x^2 - 1} \, dx =$
  $= \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} \sqrt{\cosh^2 u - 1} \, \operatorname{senh} u \, du = \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} \operatorname{senh}^2 u \, du =$
  $= \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 du = ... = 2\sqrt{15} - \frac{1}{2}\ln(4 + \ln 15) \approx 6,71$

Ejercicios de la sección 1.13.1

- Ejercicio 1: ii) $\ln|x| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) + C$
  iii) $x - \ln|x| + 2\ln|x - 1| + C$

Ejercicios de la sección 2.1.1

- Ejercicio 1:
  a) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado. Es divergente (no se le puede asignar un valor).
  b) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado. Es convergente. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2} = 1.$
  c) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado.

Es convergente. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1.$
d) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado.
Es convergente. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0.$
f) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado.
Es divergente (no se le puede asignar un valor).

g) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado.
Es convergente. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} 2.$
h) La integral es impropia pues el dominio de integración no es acotado.
Es divergente (no se le puede asignar un valor).
i) La integral es impropia pues $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, que es continua en $[0,1)$, tiene en x=1 una discontinuidad asintótica: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$. La integral es convergente. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$
k) La integral es impropia pues $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$, que es continua en $[0,1) \cup (1,3]$, tiene en x=1 una discontinuidad asintótica:
$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$.
La integral es convergente. $\int_0^3 \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} dx = 9$

Ejercicios de la sección 2.2.1

- Ejercicio 3:
  i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La sucesión es convergente. Converge a 0.
  ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La sucesión es divergente.
  iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. La sucesión es convergente. Converge a $\frac{1}{2}$.
  iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. La sucesión es convergente. Converge a $\frac{1}{2}$.

  vi) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe. La sucesión es divergente.
  vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La sucesión es convergente. Converge a 0.
  ix) La sucesión $\{r^n\}_n$ converge a 0 si $|r| < 0$, diverge si $|r| > 0$, converge a 1 si $r = 1$ y diverge si $r = -1$.

Ejercicios de la sección 2.5.1

- Ejercicio 1: i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $r=-\frac{3}{2}$, $\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}>1$ por lo tanto es divergente.

  ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^n}$ es una serie geométrica de razón $r=\frac{8}{3}$, $\left|\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}>1$ por lo tanto es divergente.
  iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $r=-\frac{1}{4}$, $\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}<1$ por lo tanto la serie es convergente. El primer término es $-\frac{1}{4}$. La suma de la serie es $S=\dfrac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})}=-\dfrac{1}{5}$
  iv) $S_n=1-\sqrt{n+1}$. La serie es divergente.
  v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$; $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. La serie es convergente. Su suma es $S=1$. vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)$. La serie es convergente. Su suma es $S=\frac{1}{5}$.
  viii) Converge. La suma es $S=\frac{16}{5}$ ix) Converge. La suma es $S=-\frac{1}{2}$.
  x) Diverge.

- Ejercicio 4: $S=\pi$

Ejercicios de la sección 2.9

- Ejercicio 1:
  a) i)Por criterio de la divergencia, ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{n^2+1}=2\neq 0$, la serie es divergente. En ii) y iii) el criterio de la divergencia no permite decidir el comportamiento.
  b) ii) Convergente. iii) Divergente.

- Ejercicio 3: i) Convergente (puede aplicarse el criterio de comparación con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$)

  ii) Divergente. (puede aplicarse el criterio de comparación con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$

)

iii) Convergente (puede aplicarse el criterio de comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

)

- Ejercicio 4:
  i) Divergente (puede aplicarse el criterio de comparación en el límite con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

  ii) Convergente (puede aplicarse el criterio de comparación en el límite con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)

  iii) Divergente (puede aplicarse el criterio de comparación en el límite con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$)

- Ejercicio 5: ambas convergentes.

- Ejercicio 6: i) Convergente. ii) Con el criterio del cociente no se puede determinar el comportamiento (ver ej. 4iii))

- Ejercicio 7: i)No se puede aplicar el criterio de Leibniz. La serie es divergente (puede probarse con el criterio de la divergencia).
  ii) y iii) ambas convergentes (puede aplicarse el criterio de Leibniz).

- Ejercicio 9: i) Convergente ii) Divergente iii) Divergente iv)Convergente v)Convergente vi)Divergente vii) Divergente viii)Convergente ix) Divergente x) Divergente xi) Divergente xii) Convergente xiii) Divergente xiv) Convergente xv) Convergente xvi) Convergente xvii) Divergente

- Ejercicio 10: i) Divergente ii) Divergente iii) Absolutamente convergente iv) Condicionalmente convergente v) Absolutamente convergente vi) Divergente.

Ejercicios de la sección 3.2.1

- Ejercicio 1: i) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = C$ (teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}(A+B) = \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$ se obtiene: $y = \dfrac{\operatorname{tg} C - x}{1 + x \operatorname{tg} C}$)

ii) $\ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$ iii) $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y+1)^2}{2} + \ln\left|\dfrac{1+x}{1-y}\right| = C$
iv) $y = e^{\frac{C}{x}}$ vi) $-e^{-y}(y+1) = x - \ln(1+e^x) + C$

- Ejercicio 2: $y = (x+1)^2(x+2)^2$

Ejercicios de la sección 3.3.1

- Ejercicio 1: i) $3x^2y + y^2 = C$ ii) $xy^3 + 3yx^2 - y^2 = C$
- Ejercicio 2: $y + \operatorname{sen} xy = 1$

Ejercicios de la sección 3.4.5

- Ejercicio 1: i) $y(x) = (x^2 + C)\, e^{-x^2}$ ii) $y(x) = (-\cos x + C)\, x$
  iii) $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + Ce^{-2x}$
- Ejercicio 2: $y(x) = \dfrac{x}{\cos x}$
- Ejercicio 3: $y(x) = -x - 1 + 2e^x$

Ejercicios de la sección 3.5.2

- Ejercicio 2: i) El teorema se aplica cualquiera sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y garantiza existencia y unicidad de la solución al PVI dado. ii) i) El teorema se aplica cualquiera sea (x_0, y_0) tal que $y_0 < x_0^2$ y garantiza existencia y unicidad de la solución al PVI dado. iii) i) El teorema se aplica cualquiera sea (x_0, y_0) tal que $y_0 \neq x_0$ garantizando existencia y unicidad de la solución al PVI dado.
- Ejercicio 3: i) Está garantizada la existencia y unicidad de la solución por ser $y' = f(x,y) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)y}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)y^2}$ continuas en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$, con $(0,1) \in D$. La solución es:
  $y(x) = \sqrt{1 + \ln\dfrac{(1+e^x)^2}{4}}$
  ii) Está garantizada la existencia y unicidad de la solución por ser $y' = f(x,y) = \dfrac{y\ln y}{\operatorname{sen} x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1+\ln y}{\operatorname{sen} x}$ continuas en $D =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 < x < \pi \wedge y > 0\}$, con $(\frac{\pi}{2}, e) \in D$. La solución es:

$$y(x) = e^{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} = e^{\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x}}$$

Ejercicios de la sección 3.6

- Modelo de crecimiento de una célula: la expresión para $m(t)$ es $m(t) = m_0 e^{Kt}$. El valor de K es $K = \dfrac{\ln 2}{35}$.
- Modelo de crecimiento restringido de una población:
  $N(t) = B - (B - N_0)e^{-Kt}$
- Modelo de enfriamiento de Newton: $T(t) = (T_0 - T_a)e^{Kt} + T_a$.
  Con $T_a = 20$, $T(0) = T_0 = 100$ y $T(20) = 60$ se obtiene
  $T(t) = 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20$ y la temperatura llegará a los 30 grados en 60 minutos.

Ejercicios de la sección 3.7.1

- Ejercicio 1: La ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_1$ es $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ y la ecuación diferencial asociada a $\mathcal{F}_2$ es $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.
  Como $\dfrac{y^2 - x^2}{2xy} . \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} = -1$, las familias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son ortogonales.
- Ejercicio 2: i) $\dfrac{3}{2}y^2 + x^2 = C$ ii) $x^2 + y^2 = C$ iii) $y^2 = 2x + C$
  iv) $y = Cx^3$

Ejercicios de la sección 4.1.1

- Actividad: ii) Si $f(x,y) = K$ $\forall (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d]$, $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$ es una partición de R y $P_i^* \in R_i$ resulta:

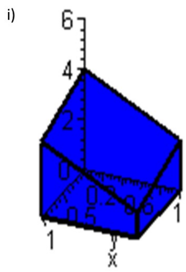
  $$\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta R_i = \sum_{i=1}^{n} K\Delta R_i = K\sum_{i=1}^{n} \Delta R_i = K.área(R)$$

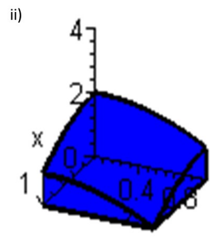
  entonces $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta R_i = K.área(R)$

iii) $Vol \approx f(1,1) + f(2,1) + f(1,2) + f(2,2) \approx 34$

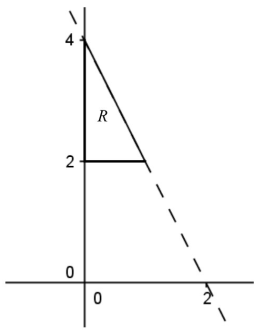
Ejercicios de la sección 4.1.2

- Ejercicio 1: i) 16 ii)$\dfrac{32}{3}$ iii)1 vi) $\displaystyle\int_1^8 \int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dxdy = 6e^8 + e$
- Ejercicio 2:



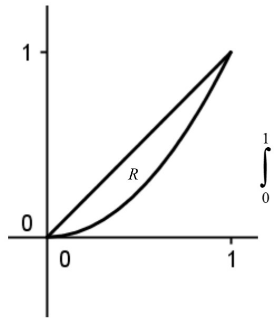


- Ejercicio 3: i)



$$\int_0^1 \int_2^{4-2x} f(x,y)dydx = \int_2^4 \int_0^{\frac{4-y}{2}} f(x,y)dxdy$$

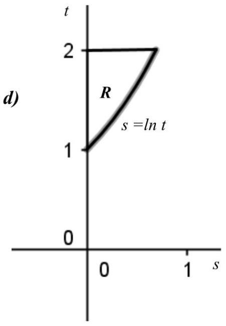
ii)



$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

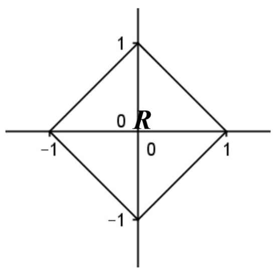
- Ejercicio 5:

d)



$$\iint_R e^s \ln t \, dA = \frac{1}{4}$$

e)



$$\iint_R (y - 2x^2)\, dA = -\frac{2}{3}$$

Ejercicios de la sección 4.2.1

- Ejercicio 1: i) $A = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{8-x^2} \, dydx = \frac{64}{3}$
- Ejercicio 2: $T_{prm} = \frac{3712}{3} \div \frac{64}{3} = 58$

- Ejercicio 3: $\dfrac{4}{3}$
- Ejercicio 4: b) $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3-y)\, dydx = -\frac{8}{3} + 3\pi \approx 6,76$

  c) $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{2y} \sqrt{4-y^2}\, dxdy = \frac{16}{3}$

  g) $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{2-x} [(3-x-y)-1]\, dydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y)\, dydx = \frac{4}{3}$

  h) $V = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{3-z} (3-y-z)\, dydz$ (Nota: proyectando el sólido en el plano xy el cálculo del volumen puede plantearse con dos integrales: $V = \displaystyle\int_0^3 \int_0^{3-x} (3-x-y)\, dydx - \int_0^2 \int_0^{2-x} [(3-x-y)-1]\, dydx$)
- Ejercicio 5: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{41}{63}, 0\right)$

Ejercicios de la sección 4.3.1

- i) $\displaystyle\iint_R (x-y)^9 (x+y)^8 dA = -\frac{511}{180} \approx -2,84$
- ii) $\acute{A}rea(R) = 1$
- iii) $\acute{A}rea(R) = \ln \dfrac{5^5}{3^3 4^3} \approx 0,59$

Ejercicios de la sección 4.4.1

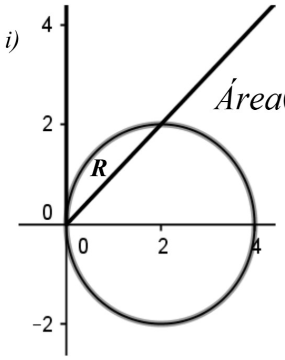
- ii) $R = \left\{(r,\theta)/\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \wedge 2 \leq r \leq \frac{4}{\operatorname{sen}\theta}\right\}$
- iii) $R = \left\{(r,\theta)/\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \wedge \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \leq r \leq 2\right\}$
- iv) $R = \{(r,\theta)/0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 4 \operatorname{sen}\theta\}$
- v) $R = \left\{(r,\theta)/0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq 4\cos\theta\right\} \cup \left\{(r,\theta)/\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 4\cos\theta\right\}$

  ó : $R = \left\{(r,\theta)/-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq 4\cos\theta\right\}$
- vi) $R = \left\{(r,\theta)/0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq r \leq 4\operatorname{sen}\theta\right\} \cup \left\{(r,\theta)/\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq 4\cos\theta\right\}$

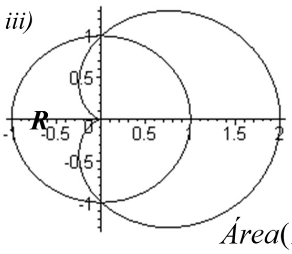
- vii) $R = \left\{ (r,\theta)/\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6} \wedge 2 \leq r \leq 4\operatorname{sen}\theta \right\}$

Ejercicios de la sección 4.5.1

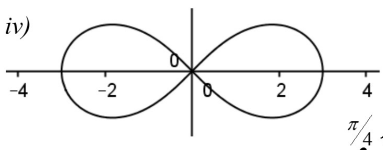
- Ejercicio 1: ii) $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = (2-\sqrt{e})2\pi$
- Ejercicio 2:



$$\acute{A}rea(R) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \pi - 2$$



$$\acute{A}rea(R) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{1+\cos\theta}^{1} r\,dr\,d\theta = 2 - \frac{\pi}{4}$$



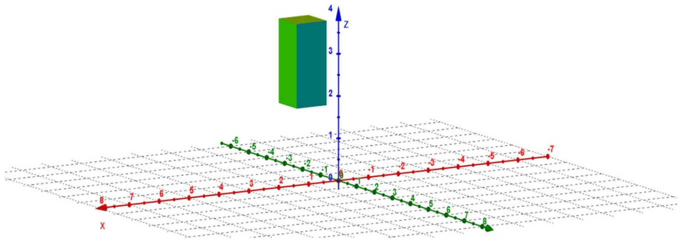
$$\acute{A}rea(R) = 4\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{9\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 9$$

- Ejercicio 3: $Volumen = \frac{16}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

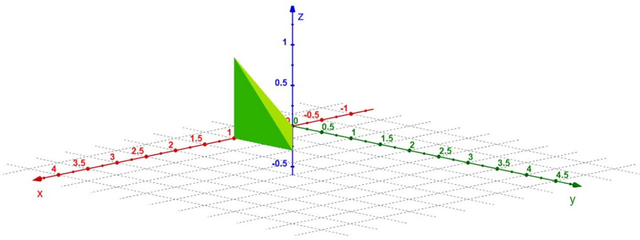
- Ejercicio 4: $Masa = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{4\operatorname{sen}\theta}^{\frac{8}{\operatorname{sen}\theta}} r^3 dr d\theta = ...$
- Ejercicio 5: $f_{prom} = \frac{2}{3}a$

Ejercicios de la sección 5.1.2

- Ejercicio 1:
  i) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2y^2z \; dzdydx = \frac{14}{3}$, $V = \{(x,y,z)/2 \le z \le 4 \wedge 0 \le y \le 1 \wedge 1 \le x \le 2\}$



  ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \; dzdydx = \frac{1}{8}$, $V = \{(x,y,z)/0 \le z \le x-y \wedge 0 \le y \le x \wedge 0 \le x \le$



- Ejercicio 3: i) $Vol = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{\frac{2-x-y}{2}}^{4-2x-2y} \; dzdydx = 2$

  ii) $Vol = \displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} \; dzdydx = \frac{2}{3}$

  iii) $Vol = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} \; dydzdx = \frac{2}{3}$

iv) $Vol = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \quad dzdydx = \dfrac{2}{3}$

iv) $Vol = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{3-x} \quad dzdydx = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (3-x)dydx =$
$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (3 - r\cos\theta) r dr d\theta = 12\pi$

Ejercicios de la sección 5.3.1

- Ejercicio 2:
  i) $V = \left\{(r, \theta, z)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 2 \wedge r^2 \leq z \leq 4\right\}$
  $Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \; dzdrd\theta = 8\pi$

  ii) $V = \left\{(r, \theta, y)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq \sqrt{2} \wedge \dfrac{r^2}{2} \leq y \leq \sqrt{3 - r^2}\right\}$
  $Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} r \; dydrd\theta = \left(\sqrt{3} - \dfrac{5}{6}\right) 2\pi$
  iii) $V = \left\{(r, \theta, z)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq a \wedge -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\right\}$
  $Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r \; dzdrd\theta = \dfrac{4}{3}\pi a^3$

- Ejercicio 3: $Masa = \iiint_V z \; dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} z \; r \; dzdrd\theta =$
  10π

Ejercicios de la sección 5.4.1

- Ejercicio 1: i) $V = \left\{(\rho, \theta, \varphi)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{3} \wedge 0 \leq \rho \leq 2\right\}$
  $Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta = \dfrac{8}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi$

  ii) $V = \left\{(\rho, \theta, \varphi)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \wedge 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{\cos\varphi}\right\}$
  $Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta = \dfrac{1}{3}\pi$

  iii) $V = \left\{(\rho, \theta, \varphi)/0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi\right\}$

$$Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta = \frac{1}{3}\pi$$

- Ejercicio 2: i) $f_{prom} = \dfrac{3}{4}$
- Ejercicio 3:i) $Vol = \dfrac{3\pi}{32}$ iv) $Vol = \dfrac{7\pi}{3}$ vi) $Vol = \dfrac{7\pi}{3}$ vii) $Vol = \dfrac{5\pi}{3}$

Ejercicios de la sección 6.3.2

- Ejercicio 1: i) $\dfrac{88}{3}$ ii) $\sqrt{3}(e^{\pi} - 1)$ iii) $3\sqrt{2}\operatorname{senh} 2$
- Ejercicio 2: i) $S(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

  $$C : \vec{r} = \vec{r*}(s) = \left\langle a \; \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \; , a \; \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \; , b \; \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\rangle \quad ;$$

  $s \in [0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}]$

  ii) $S(t) = \sqrt{2}(e^t - 1)$ con $0 \leq t \leq 1$

  $$C : \vec{r} = \vec{r*}(s) = \left\langle \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \; \cos \left[\ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right] \; , \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \; \operatorname{sen} \left[\ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right] \right\rangle \; ;$$

  $s \in [0, \; \sqrt{2}(e - 1)]$

Ejercicios de la sección 6.6.1

- Ejercicio 1:
  i) $div(\vec{F}) = 2x + 2y + 2z \quad ; \quad rot(\vec{F}) = \vec{0}$
  ii) $div(\vec{F}) = e^x \cos + ye^y \cos x + 1 \quad ; \quad rot(\vec{F}) = \langle 0 \; , \; 0 \; , e^x \operatorname{sen} y - e^y \operatorname{sen} x \rangle$
- Ejercicio 3: i) Campo vectorial ii) Campo escalar iii) Campo vectorial

  iv) Campo escalar v) Campo vectorial

Ejercicios de la sección 6.7.1

- Ejercicio 1: a) $\dfrac{80\sqrt{10}}{3}$ b) $\dfrac{3\pi}{2}$

- Ejercicio 2: b) $\frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}}-1\right)$
- Ejercicio 3: a) $\frac{32}{3}$

Ejercicios de la sección 6.8.1

- Ejercicio 1: a) 31 c) 0 d) 10 e) -2
- Ejercicio 2: a) 0 b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{34}{7}$
- Ejercicio 3: $32\pi^2$

Ejercicios de la sección 6.9.3

- Ejercicio 1: a) π b) -12π d)Para $C : x^2+y^2=1$, no se puede aplicar el teorema pues las componentes de F no están definidas en $(0,0)$ y ese punto pertenece a la región limitada por C (no se satisfacen las hipótesis del teorema); la integral debe calcularse en forma directa (observar que las componentes del campo son continuas en $\mathbb{R}^2-(0,0)$) y el resultado es: 0. Para $C : (x-2)^2+y^2=1$, puede aplicarse el teorema (verificar que se cumplen las hipótesis) y el resultado es: 0. g) $\frac{32}{3}$
- Ejercicio 2: a) 8π d) $\frac{3\pi}{8}$
- Ejercicio 5: $\oint_C \vec{F}_1\cdot d\vec{r}=0$ $\quad\oint_C \vec{F}_2\cdot d\vec{r}=2\pi$

Ejercicios de la sección 6.10.1

- Ejercicio 1: a) $f(x,y)=x^2y-y$ es una función potencial de $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^2$, luego, el campo vectorial es conservativo en $\mathbb{R}^2$. El valor de la integral se puede obtener aplicando el teorema fundamental para integrales de línea: $f(3,1)-f(1,0)=8$.
  b) $f(x,y)=e^{x\,y}-y^2$ es una función potencial de $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^2$, luego, el campo vectorial es conservativo en $\mathbb{R}^2$. El valor de la integral se puede obtener aplicando el teorema fundamental para integrales de línea:
  $f(0,4)-f(1,0)=-16$.

c) $f(x,y,z) = yx^2 + xz^2$ es una función potencial de $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$, luego, el campo vectorial es conservativo en $\mathbb{R}^3$. El valor de la integral se puede obtener aplicando el teorema fundamental para integrales de línea: $f(4,-1,0) - f(2,1,3) = -38$.

- Ejercicio 2: 0
- Ejercicio 4: a) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2}$ es una función potencial de $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$, luego, el campo vectorial es conservativo en $\mathbb{R}^3$. El valor de la integral se puede obtener aplicando el teorema fundamental para integrales de línea: $f(1,0,4\pi) - f(1,0,0) = 8\pi^2$
- Ejercicio 5:
  a) No es conservativo en $\mathbb{R}^3$.
  b) No es conservativo en $\mathbb{R}^3$.
  c) Es conservativo en $\mathbb{R}^3$.
  d) Es conservativo en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.
  e) No es conservativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ejercicios de la sección 7.2.1

- Ejercicio 1:
  a) S es una superficie cilíndrica circular de radio a, $(S : x^2 + y^2 = a^2)$
  $\vec{N} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = a \cos u \, \vec{i} + a \operatorname{sen} u \, \vec{j} + 0 \, \vec{k}$
  b) S es una superficie esférica de radio a, $(S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$
  $\vec{N} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -a^2 \cos u \operatorname{sen}^2 v \, \vec{i} - a^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v \, \vec{j} - a^2 \operatorname{sen} v \cos v \, \vec{k}$
- Ejercicio 2:
  a) $4\pi a^2$ c) 4 d) $\dfrac{\sqrt{5}\pi}{2}$ e) $32\sqrt{2}\,\pi$ g) $\dfrac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ h) $\dfrac{32}{3}$ i) $a^2(\pi - 2)$

Ejercicios de la sección 7.3.1

- Ejercicio 1: a) 3π c) $\dfrac{2}{3}\pi a^4$ e) $\dfrac{1}{4}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$
- Ejercicio 2: *Centroide* : $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$

Ejercicios de la sección 7.4.3

- Ejercicio 1: b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -4π e) -18π
- Ejercicio 3: i) $\frac{2\pi}{3}a^3$ ii) $\frac{2\pi}{3}a^3$

Ejercicios de la sección 7.5.2

- Ejercicio 1: a) 4π o -4π , (según sea la orientación de elegida en la curva) c) 0 d) 0 e) 0
- Ejercicio 2: a) 0 b) 4π

Ejercicios de la sección 7.6.2

- Ejercicio 1: a) -16 b) 3 c) 4π d) 32π
- Ejercicio 2: a) 0 b) 4π
- Ejercicio 5: El flujo es máximo e igual a $\frac{27}{2}$ si $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$.